

Développement : Décomposition de Dunford et exponentielle de matrice

Référence : Algèbre Probabilité, Gourdon, page 203 et mathématique pour l'agrégation algèbre, Rombaldi, page 765-766 et 779-780

Leçon : 150, 151, 152, 153, 155 et 156.

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que le polynôme caractéristique χ_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec d diagonalisable et n nilpotent tel que :

- (i) $f = d + n$
- (ii) $d \circ n = n \circ d$

Démonstration. On écrit

$$P_f = (-1)^n \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

et pour tout i , on note

$$N_i = \ker(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$$

les sous-espaces caractéristiques de f .

Existence :

Comme $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$, il suffit de définir d et n sur chaque N_i . On les définit comme suit : pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, pour tout $x \in N_i$,

$$\star d(x) = \lambda_i x,$$

$$\star n(x) = f(x) - \lambda_i x = f(x) - d(x)$$

Autrement dit, pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$ on a :

$$d_i = d|_{N_i} = \lambda_i Id_{N_i}, \quad n_i = f|_{N_i} - \lambda_i Id_{N_i}.$$

Les d_i et n_i sont des endomorphismes de N_i car N_i est stable par f , donc par d et n .

Ainsi d est diagonalisable (les valeurs propres sont celles de f).

De plus, pour tout i , on a $n_i^{\alpha_i} = 0$. Si on pose $\alpha = \sup \alpha_i$, on obtient que n^α s'annule donc sur chaque N_i , donc sur E c'est-à-dire $n^\alpha = 0$.

Montrons que d et n commutent. Soit $i \in \{1, \dots, s\}$, on a :

$$d_i = \lambda_i Id_{N_i}, \quad n_i = f|_{N_i} - \lambda_i Id_{N_i}.$$

Donc, pour $x \in N_i$:

$$n_i \circ d_i(x) = n_i(\lambda_i x) = \lambda_i n_i(x) = d_i(n_i(x)) = d_i \circ n_i(x).$$

Ainsi n_i et d_i commutent, donc d et n commutent.

Unicité :

Soit (d', n') un autre couple vérifiant les conditions. On a pour $x \in E$:

$$d' \circ f(x) = d'(d'(x) + n'(x)) = d' \circ d'(x) + d' \circ n'(x).$$

Comme d' et n' commutent, on obtient :

$$d' \circ f(x) = d' \circ d'(x) + n' \circ d'(x) = (d' + n') \circ d'(x) = f \circ d'(x).$$

On en déduit (par récurrence) que N_i est stable par d' car $x \in N_i$:

$$(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}(d'(x)) = d' \circ (f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}(x) = 0.$$

Comme $d_i = \lambda_i Id_{N_i}$, on en déduit que $d' \circ d = d \circ d'$ sur N_i . Ceci étant vrai pour tout i , on en déduit que d et d' commutent.

De plus, d et d' sont diagonalisables, on peut diagonaliser dans une même base, donc $d - d'$ est diagonalisable.

Comme $n = f - d$ et $n' = f - d'$ et que $d \circ d' = d' \circ d$, on en déduit que n et n' commutent.

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $n^p = n'^q = 0$, on a donc

$$(n - n')^{p+q} = \sum_{k=1}^{p+q} \binom{p+q}{k} n^k (-n')^{p+q-k}$$

★ Si $k < p$, on a donc que $p + q - k > p + q - p = q$ donc, $n'^k = 0$

★ Sinon $k \geq p$ donc $n^p = 0$.

Donc $(n - n')^{p+q} = 0$ donc $n - n'$ est nilpotent. Or $d - d' = n - n'$ donc, $d - d'$ est diagonalisable nilpotent donc $d - d' = 0$. Ainsi $d = d'$ et $n = n'$. $\square$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$ et $A = D + V$ sa décomposition de Dunford avec D diagonalisable et V nilpotente d'indice $q \geq 1$.

Théorème :

On a $e^A = e^D e^V = e^D \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} V^k$ et la décomposition de Dunford de e^A est donnée par $e^A = e^D + e^D(e^V - I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^V - I_n)$ nilpotente.

Démonstration. Comme D et V commutent, on a $e^A = e^D e^V$ avec $e^V = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} V^k$ puisque $V^k = 0$ pour $k \geq q$ et on peut écrire que :

$$\begin{aligned} e^A &= e^D \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} V^k = e^D \left(I_n + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} V^k \right) \\ &= e^D + V e^D \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} V^{k-1} = e^D + V \cdot W \end{aligned}$$

Comme V est nilpotente d'indice q et commute à W , on a $(V \cdot W)^q = V^q W^q = 0$, c'est-à-dire que $V \cdot W$ est nilpotent. L'endomorphisme e^D est diagonalisable comme D . On a donc obtenu ainsi la décomposition de Dunford de e^A puisque cette décomposition est unique. La partie nilpotente de cette décomposition s'écrit aussi $V \cdot W = e^D \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} V^k = e^D(e^V - I_n)$. $\square$

Corollaire 0.3 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$. Une telle matrice est diagonalisable si, et seulement si, e^A est diagonalisable.

Démonstration. On a déjà vu, que le polynôme caractéristique de A soit scindé ou non, que e^A est diagonalisable si A l'est (voir le plan de la leçon mais il faut savoir le faire).

Réciproquement si e^A est diagonalisable, on a alors $e^D(e^V - I_n) = 0$ (partie nilpotente dans la décomposition de Dunford de e^A), soit $e^V = I_n$ puisque e^D est inversible.

On a donc

$$\sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} V^k = I_n,$$

où $q \geq 1$ est l'indice de nilpotence de V , soit $\sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} V^k = 0$, c'est-à-dire que

$$P(X) = \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} X^k$$

est un polynôme annulateur de V et X^q qui est le polynôme minimal de V va diviser P , ce qui impose $q = 1$ (on a $\frac{1}{q!} = 1$ en identifiant les termes de degré q), soit $V = 0$ et A est diagonalisable.

Pour montrer que $q = 1$, on peut aussi écrire que si $q \geq 2$, alors $V^{q-1} = V^{q-2} \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} V^k = 0$, ce qui est incompatible avec le fait que q est l'indice de nilpotence de V . On a donc $q = 1$. $\square$

Application :

Résoudre l'équation $e^A = I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Démonstration. Pour $n = 1$, on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et les solutions de $e^z = 1$ dans $\mathbb{C}$ sont les $e^{2in\pi}$ où n décrit $\mathbb{Z}$.

De manière générale, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $e^A = I_n$. La décomposition de Dunford $A = D + V$ de A donne celle de e^A ,

$$e^A = e^D + e^D(e^V - I_n)$$

et avec l'unicité de cette décomposition, on déduit que l'équation $e^A = I_n$ équivaut à

$$e^D = I_n \quad \text{et} \quad e^V = I_n.$$

On a vu que $e^V = I_n$ avec V nilpotente équivaut à $V = 0$. De plus e^D est diagonalisable de valeurs propres e^{μ_k} où les μ_k , pour k compris entre 1 et n , sont les valeurs propres de D , donc celles de A et $e^D = I_n$ impose $e^{\mu_k} = 1$, soit $\mu_k \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour tout k compris entre 1 et n . En définitive, A est diagonalisable de valeurs propres dans $2i\pi\mathbb{Z}$. La réciproque étant évidente.

On peut aussi dire que si $e^A = I_n$, la matrice e^A est en particulier diagonalisable, donc aussi A (corollaire 23.1 avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ et $e^A = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1} = I_n$ nous donne $\text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) = I_n$, soit $e^{\lambda_k} = 1$ pour tout k et $\lambda_k \in 2i\pi\mathbb{Z}$. $\square$