

Développement : Trigonalisation simultanée

Référence : Mathématiques pour l'agrégation externe : Algèbre, ROMBALDI, pages 678

Leçon : 148, 150, 151, 156 et 159.

Théorème :

Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'endomorphismes trigonalisables de E qui commutent deux à deux (l'ensemble I ayant au moins deux éléments), il existe alors une base commune de trigonalisation dans E pour la famille $(u_i)_{i \in I}$.

Démonstration. ★ **Étapes n°1 :** On montre tout d'abord qu'il existe un vecteur propre non nul commun à tous les u_i .

Pour ce faire, on raisonne par récurrence sur la dimension n de E . Pour $n = 1$, le résultat est évident puisque dans ce cas, tous les u_i sont des homothéties.

On suppose que E est de dimension $n + 1$ et que le résultat est acquis pour les espaces vectoriels de dimension inférieure ou égale à n .

Si tous les u_i sont des homothéties, le résultat est clair. On suppose donc que ce n'est pas le cas pour $n \geq 2$.

On se fixe $j \in I$ tel que u_j ne soit pas une homothétie. Comme u_j est trigonalisable, il a des valeurs propres dans $\mathbb{K}$. Si λ est l'une d'elles, alors l'espace propre $E_{j,\lambda} = \ker(u_j - \lambda Id)$ est de dimension au plus égale à n (sinon, $u_j = \lambda Id_{n+1}$ est une homothétie). De plus, $E_{j,\lambda}$ est stable par chaque u_i pour i dans $I \setminus \{j\}$ (puisque $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$) et la restriction de chaque u_i à $E_{j,\lambda}$ est trigonalisable. Par HR, il existe donc un vecteur propre non nul $x \in E_{j,\lambda}$ commun à tous les u_i , pour $i \in I \setminus \{j\}$ et x est un vecteur propre non nul commun à tous les u_i pour $i \in I$.

★ **Étapes n°2 :** On en déduit le théorème.

Pour en déduire l'existence d'une base commune de trigonalisation, on raisonne par récurrence sur $n \geq 1$, le résultat étant évident pour $n = 1$.

On suppose que E est de dimension $n + 1$ et que le résultat est acquis pour les espaces vectoriels de dimension inférieure ou égale à n .

D'après ce qui précède, on désigne par e_1 un vecteur propre non nul commun à tous les u_i pour $i \in I$.

En complétant $\{e_1\}$ par une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de E , la matrice de chaque u_i dans $\mathcal{B}$ est de la forme

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \mu_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix}.$$

Comme $\chi_{u_i} = (\lambda_i - X)\chi_{B_i}(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$ (puisque u_i est trigonalisable), il en est de même de χ_{B_i} et la matrice B_i est trigonalisable. De plus, comme les u_i commutent deux à deux, on a

$$A_i A_j = \begin{pmatrix} \lambda_i & \mu_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_j & \mu_j \\ 0 & B_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \lambda_j & \lambda_i \mu_j + \mu_i B_j \\ 0 & B_i B_j \end{pmatrix}$$

pour tous i, j dans I et les B_i commutent deux à deux. L'hypothèse de récurrence appliquée à l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ nous assure de l'existence d'une matrice inversible Q telle que chaque matrice $Q^{-1} B_i Q$ soit triangulaire (chaque B_i définit dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ un endomorphisme trigonalisable v_i et ces endomorphismes commutent deux à deux).

En notant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

on définit une matrice inversible telle que

$$P^{-1}A_iP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i & \mu_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & \mu_i Q \\ 0 & Q^{-1}B_iQ \end{pmatrix}$$

pour tout $i \in I$ et ces matrices sont triangulaires. Les endomorphismes u_i , pour $i \in I$, sont donc simultanément trigonalisables. $\square$