**Leçon 215 - Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.**

Cadre : U,V sont des ouverts de E,F, des $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

## 1. Généralités sur la différentiabilité. —

*1. Applications différentiables.* —

- Def : Application différentiable en un point. $f : U \to V$ est différentiable en $x \in U$ ssi il existe une application linéaire $g : E \to V$ tq $f(x+h) = f(x) + g(h) + o(\|h\|)$ pour h dans un voisinage de 0.
- Pro : Cette application g est unique et est appelée la différentielle de f en x, notée $D_x(f)$.
- Si f est différentiable pour tout $x \in U$, on dit qu'elle est différentiable sur U.
- Ex : Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, être différentiable en x signifie avoir un $DL_1(x)$, ce qui signifie être dérivable en x, et $D_x(f)(h) = f'(x).h$.
- Ex : Pour f constante, $D_x(f)(h) = 0$. Pour f linéaire, $D_x(f)(h) = f(h)$.
- Pro : Une fonction différentiable en x est continue en x.
- Pro : $D_x(f + \lambda.g) = D_x(f) + \lambda D_x(g)$.
- Pro : $D_x(f \circ g) = D_{g(x)}(f) \circ D_x(g)$
- Def : $f : U \to V$ est de classe $C^1$ ssi elle est dérivable et si $x \mapsto D_x(f)$ est continue.
- Def : $f : U \to V$ est un $C^1$-difféom ssi elle est de classe $C^1$ et admet un inverse de classe $C^1$
- Pro : Si $f : U \to V$ est un $C^1$-difféom, alors $\forall x \in V$, $D_x(f^{-1}) = (D_{f^{-1}(x)}(f))^{-1}$.
- Ex : $D_M(Tr)(H) = Tr(H)$.
- Ex : On a $D_{I_n}(det)(H) = Tr(H)$. Donc pour $A \in Gl_n(\mathbb{R})$, $D_A(det)(H) = Tr(det(A).A^{-1}H) = Tr(com(A)^t.H)$. Comme det est de classe $C^1$ car polynômiale, on trouve alors par densité que $D_M(det)(H) = Tr(com(M)^t.H)$.
- Ex : $D_0(exp)(H) = H$.

*2. Dérivée directionnelle, dérivée partielle.* —

- Def : Soit $e \in E$ unitaire et $x \in U$ On a un $r > 0$ tq $B(x,r) \in U$. $f : U \to V$ admet une dérivée directionnelle en x de direction e ssi $g : h \in ]-r,r[ \mapsto f(x+h.e) \in V$ est dérivable en 0.
  On note alors $\partial_e D_x(f) := g'(0)$.
- Pro : Si f est dérivable en u, alors elle admet des dérivées directionnelles pour toutes les directions.
- Def : Les dérivées partielles de f en x sont les dérivées directionnelles de f en x selon les directions données par les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de la base canonique de $E$.
  On les note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
- Pro : Si f est différentiable en a, on a $D_a(f)(h) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i$.
- Contre-ex : Application ayant des dérivées directionnelles selon toutes les directions mais pas différentiable.
- Pro : Si les dérivées partielles existent et sont continues, alors f est différentiable.
- Contre-ex : $f(x) = x^2 sin(\frac{1}{x})\chi_{\mathbb{R}^*}(x)$ est différentiable mais sa dérivée partielle n'est pas continue.
- Def : Pour $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, on peut voir $f(x)$ comme $(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_p(x_1,\ldots,x_n))$. Si f est différentiable en x, alors les $f_i$ sont différentiables en x, et on note $Jac_x(f)$ la matrice des différentielles partielles des $f_i$, que l'on appelle jacobienne. C'est la matrice associée à $D_x(f)$ dans les bases canoniques de E et F.
  On a $(Jac_x(f))i,j = \frac{\partial f_i}{\partial x_i j}(x)$.
- Rem : $Jac_x(f \circ g) = Jac_{g(x)}(f).Jac_x(g)$
- Calcul de $D_x(g)$ pour $g(x) = f(x,-x)$ par composition. Calcul de $D_{(x,y)}(g)$ pour $g(x,y) = f(y,x)$ par composition.

*3. Inégalité des accroissements finis.* —

- Thm : Théorème des accroissements finis sur $\mathbb{R}$, pour f de classe $C^1$.
- Thm : Inégalité forte des accroissements finis sur $\mathbb{R}^n$.
- Rem : Le corollaire d'égalité du TAF n'est plus vrai en dimension supérieure. Ex : $t \mapsto e^{it}$.
- Cor : Si la différentielle est bornée, on est Lipschitzien. Si elle est nulle, on est constant sur les composantes connexes.
- Pro : Différentielle d'une limite.
- App : Calcul de la différentielle de l'exponentielle.

*4. Formules de Taylor.* —

- Def : Fonctions $k$-fois différentiables, de classe $C^k$. Les différentielles k-ièmes sont des fonctions k-linéaires.
- Formule de Taylor avec reste intégral : $f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{D_x^{(k)}(f)(h)}{k!} + \int_0^1 (-t)^n \frac{D_{x+th}^{(n+1)}(f)(h)}{n!} dt$.
- Application à la convergence de séries entières.
- Formule de Taylor-Young : $R_n(h) = o((h)^n)$.

## 2. Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites, applications. —

*1. Le théorème d'inversion locale.* —

- Théorème d'inversion locale : Soit $f : U \to V$ de classe $C^1$. Si il existe $x \in U$ tel que $D_x(f)$ soit inversible, alors il existe un voisinage de x sur lequel f est une bijection, dont l'inverse est de classe $C^1$.
- Ex : $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^0 - \{(0,0)\}$.
- Contre-ex : $f(x) = x + x^2 sin(\frac{\pi}{x})\chi_{\mathbb{R}^*}(x)$.
- Rem : On peut remplacer $C^1$ par $C^k$ dans l'énoncé du théorème.
- Théorème d'inversion globale : Si f est de classe $C^1$, injective, et de différentielle inversible en tout point de U, alors c'est un $C^1$-difféomorphisme sur son image.
- Ex : Dans le 1er exemple, le th d'inversion globale ne s'applique pas car f n'est pas injective.
- App : Théorème de changement de coordonnées.

- Ex : Passage en coordonnées polaires.
- Pro : $exp : M_n(\mathbb{K}) \to Gl_n(\mathbb{K})$ est $C^1$ et $D_0(exp) = exp(0) = I_n$, donc exp est un $C^1$-difféom d'un voisinage de 0 dans $M_n(\mathbb{K})$ vers un voisinage de $I_n$ dans $Gl_n(\mathbb{K})$.
- Rem : $exp$ est un difféom local mais pas global.
- Pro : $Gl_n(\mathbb{K})$ n'admet pas de sous-groupes de taille arbitrairement petite.
- **Dev** : Lemme de Morse : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^3$. Soit $x \in U$ tq $D_x(f) = 0$, et tq $D^2_x(f)$ soit non-dégénérée de signature (p,q).
  Alors il existe un voisinage V de x, W un voisinage de 0, et $g : V \to W$ un $C^1$-difféomorphisme tel que $\forall y \in W$, $f(g^{-1}(y)) = f(x)+y_1^2+\cdots+y_p^2-(y_{p+1}^2+\cdots+y_{p+q}^2)$.
- App : On a un reparamétrage de classe $C^1$ localement en x qui nous permet d'étudier la position d'un graphe par rapport à son plan tangent via une forme quadratique.

*2. Le théorème des fonctions implicites.* —

- Théorème des fonctions implicites : Soient E,F,G des Banach de dim finie, U,V des ouverts de E,F et $f : U \times V \to G$ de classe $C^1$. S'il existe $(u_0, v_0) \in U \times V$ tels que $\partial_v D_{(u_0,v_0)}(f)$ soit inversible, alors il existe des voisinages $U_1, V_1$ de u,v et une fonction $g : U_1 \to V_1$ de classe $C^1$ telle que $\forall (u, v) \in U_1 \times V_1$, $f(u, v) = f(u_0, v_0) \Leftrightarrow v = g(u)$.
- Rem : Cela marche aussi si on remplace $C^1$ par $C^k$.
- Ex : Exemple du cercle. Les points où la pente est infinie posent problème, alors on préfère morceler le domaine en cartes et faire un reparamétrage sur chaque carte.
- Rem : Etude de la différentielle de $g$, retour sur l'exemple du cercle.
- La régularité de g est la même que celle de f. On peut ainsi avoir un DL de g.
- Rem : Le théorème des fonctions implicites et le théorème d'inversion locale sont équivalents.
- App : Résolution approchée d'une équation. Méthode et exemples.
- Rem : Lien entre équation différentielle et fonctions implicites. Equation de Burgers avec méthode.
- App : La racine simple d'un polynôme dépend de façon $C^\infty$ de ses coefficients.
- Rem : L'ensemble des polynômes scindés à racines simples est un ouvert. C'est $Disc^{-1}(\mathbb{K}^*)$.

*3. Applications aux sous-variétés.* —

- Def : Sous-variété
- Théorème des sous-variétés.
- Rem : On utilise le théorème des fonctions implicites et le théorème d'inversion locale dans la preuve. (Important de le préciser)
- Exemples correspondant aux équivalentes : sphère, tore, graphe d'une fonction continue (sin(x) par exemple)
- Ex : Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension n. Ainsi, $Gl_n(\mathbb{R})$ est de dimension $n^2$. De plus, son plan tangent est $M_n(\mathbb{R})$.
- Ex : L'ensemble des matrices de rang r est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dim $n^2 - (n - r)^2$.
- **Dev** : Théorème de Cartan-Von Neumann : Tout sous-groupe fermé de $Gl_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété.
- Ex : $O_n(\mathbb{R}) := Ker(M \mapsto M^tM - I_n)$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{R})$.
- Ex : $Sl_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dim $n^2 - 1$.

## 3. Optimisation. —

*1. Différentielles et extrema, cas sans contraintes.* —

- Pro : Isométrie canonique pour voir la différentielle seconde comme une application bilinéaire.
- Théorème de Schwarz : La différentielle seconde est symétrique : $\partial_x(\partial_y f) = \partial_y(\partial_x f)$
- Contre-exemple.
- Def : Pour $f : U \to \mathbb{R}$, la hessienne de f en x est la matrice symétrique associée à la forme quaratique définie par $D^{(2)}_x(f)$.
- Pro : Conditions d'extremum du premier ordre et du deuxième ordre avec l'annulation de la différentielle et le fait que la hessienne soit positive ou définie positive.
- Rem : Réécriture des conditions du deuxième ordre dans le cas de $\mathbb{R}^2$.

*2. Conditions d'optimalité sous contraintes.* —

- Théorème des extrema liés.
- App : Démonstration de l'inégalité arithmético-géométrique.
- App : Emballage optimal d'une boîte.
- App : Application à la diagonalisation des endomorphismes symétriques.
- App : Inégalité de Hadamard.

**Références**

Rouvière : Applis différentiables, Dérivées partielles, Inégalité des accroissements finis. Formules de Taylor. Th d'inversion locale, applications. Lemme de Morse (Dev). Th des fonctions implicites, interprétation. Résolution approchée d'une équation, Burgers. Inégalité de Hadamard. Sous-variétés. Exemples de sous-variétés.
Objectif Agrégation : Racine k-ième d'une matrice. Avoir un DL de la fonction implicite, TIL et TFI équivalents. Régularité des racines simples d'un poly. Appli du th des extrema liés.
Lafontaine : Immersion,submersion. Sous-variétés, vecteurs tangents, espaces tangents.
Gourdon : Th des extrema liés.
Gonnord, Tosel : Théorème de Cartan-Von Neumann. (Dev)
Mneimé, Testard : Théorème de Cartan-Von Neumann. (Dev)
H2G2 : Exemples de sous-variétés.

---

*May 9, 2017*

*Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes*