

Leçon n° 106 :

Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie, sous-groupe de $GL(E)$. Applications.

• Références :

- Rombaldi : "Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie"
- Gurelton : "Algèbre"
- Jacquet-Malo : "Algèbre à l'agrégation"

• Dev :

- Burnside (Dev 7)
- Générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{K})$ (Dev 13)
- Décomposition polaire (Dev 23)

I - Généralités

- 1) Définitions et propositions générales (p 139)
- 2) Quelques sous-groupes particuliers (p 141)
- 3) Cas groupes finis

↳ DEV: Burnside

II - Parties Génératrices et Pivot de Gauss

- 1) Parties Génératrices (p 145 - p 151)
↳ DEV: Générateurs GL_n et SL_n
- 2) Pivots de Gauss (p 183)

III - Topologie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (p 159)

IV - Groupe orthogonal (p 720)

- 1) Généralités
- 2) Générateurs
- 3) Topologie sur $O(E)$ et $SO(E)$
↳ DEV: Décomposition polaire

En mathématiques deux points de vues peuvent amener à étudier le groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E .

On peut le voir de deux point de vue :

- un point de vue sur les applications linéaires : comme un sous ensemble des applications linéaires, les applications linéaire dont le noyau est réduit à 0;
- ou encore d'un point de vue matricielle : comme le groupe des matrices inversibles de taille n à coefficients dans K et cela forme un K espace vectorielle.

Par l'importance de ce groupe et ces nombreux résultats utiles dans différents domaine, naît la leçon suivante :

"Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications."

I - Généralités	II - Parties Génératrices	III - Topologie sur R ou C	IV - Groupe Orthogonal
On peut se demander qu'est-ce qui caractérise les éléments de ce groupe : par exemple "$u \in GL(E) \Leftrightarrow \ker(u) = \{0\}$" ou encore regardé quels sont ces sous groupes particuliers : $SL(E)$ et son noyau $Z(SL(E))$; qui sont les racine n-ième de l'unité dans K^*; $O(E)$ qui à un rôle important (on lui consacre une partie par la suite). Et on verra lors d'un premier développement que si un ss-g de $GL(E)$ est fini ssi G est d'exposant fini. (Réciproque de Lagrange) DEV 1 : Burnside	Après avoir vue brièvement des généralité sur $GL(E)$ nous verrons comment nous pouvons le générer et cela fera l'objet d'un second développement : DEV 2 : Générateurs de SL_n et GL_n	Un exercice rencontré dans la vie étudiante et de démontrer que le déterminant est une fonction C^1 pour se faire on a besoin de la notion que $GL(E)$ est dense dans $L(E)$. C'est pour cela que nous allons énumérer des résultat topologique sur notre groupe étudié	Comme dit précédemment le groupe orthogonal est un sous groupe particulier de $GL(E)$ et il nécessite une attention particulière on pourra voir que : • les matrices dans ce sous groupe sont de déterminant ± 1 $A \in O(E) \Rightarrow \det(A) = \pm 1$ • que les réflexions engendre $O(E)$; • ou encore qu'on peut écrire toute matrice de GL_n comme une matrice dans O_n multiplier par une matrice de S_n^{++}; ce résultat fera office d'un dernier développement : DEV 3 : Décomposition polaire

Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie. Sous-groupes de GL(E). Applications.

I - Généralités

1) Définitions et Propriétés Générales

Rappels et Notations : Soit K un corps commutatif, E un K -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^+$. $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ le groupe des automorphismes de E .

On note $M_n(K)$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K et $GL_n(K)$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(K)$.

On note id (resp. I_n) l'endomorphisme (resp. la matrice) identité.

On appelle homothétie (resp. matrice scalaire) un endomorphisme (resp. une matrice) de la forme λid (resp. λI_n) où $\lambda \in K$.

On note $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

On note $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de K^n . $M(E)$ celle de $M_n(K)$ définie par $E_{ij} e_k = \delta_{ij} e_k$ où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ sont équivalents :

- (i) $u \in GL(E)$
- (ii) $\ker u = \{0\}$ (ou u injectif)
- (iii) $\text{Im } u = E$ (ou u surjectif)
- (iv) $\det(u) \neq 0$
- (v) u transforme toute base de E en une base de E .
- (vi) $\exists v \in \mathcal{L}(E)$, $uv = id$ (admet un inverse à droite)
- (vii) $\exists w \in \mathcal{L}(E)$, $wu = id$ (inverse à gauche)

2) Quelques Sous-Groupes Particuliers

On pose $SL(E) := \{u \in \mathcal{L}(E), \det(u) = 1\}$ et $SL_n(K) = \{M \in M_n(K), \det(M) = 1\}$.

Théorème : $SL(E)$ et un sous-groupe distingué de $GL(E)$ isomorphe à $SL_n(K)$ (qui est aussi distingué dans $M_n(K)$). De plus, le groupe quotient $\frac{GL(E)}{SL(E)}$ est isomorphe à K^* .

Rapportons : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ sont équivalents :

- (a) u est une homothétie (λid) et stabilise toute droite de E (à l'exception de $\{0\}$).

Théorème : On a : $Z(GL(E)) = K^* \cdot id$ et $Z(SL(E)) = \{u \in GL(E), u(x) = x \forall x \in E\}$.

Rq : Comme $\text{pr}_n(K)$ est cyclique, il en est de même de $Z(SL(E))$.

Rappels/Notations : Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien, on dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E .

On pose dans le cas IV, que u est un sous-groupe de $GL(E)$.

3) Sous-groupes finis de $GL(E)$.

On suppose K algébriquement clos et de caractéristique nulle.

On dit qu'un groupe G est d'exposant fini s'il existe un $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall g \in G, g^m = id$.

Prop : Un groupe fini est d'exposant fini.

Théorème (Burnside) : Soit G un sous-groupe de $GL(E)$.

Sont équivalents :

- 1) G est fini
- 2) G est d'exposant fini
- 3) tous les éléments de G sont diagonalisables et $\text{tr}(g) \in K$ pour tout $g \in G$.

Lemme 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est nilpotent si et seulement si sa seule valeur propre est 0.

Lemme 2 : u est nilpotent si et si $\forall h \in \mathbb{N}, \text{tr}(u^h) = 0$.

Rq : Si G est commutatif et $K = \mathbb{C}$, si G est fini, alors les éléments de G sont simultanément diagonalisables. Pour $g \in G$, on note $D = \text{diag}(\lambda_1(g), \dots, \lambda_n(g))$, la matrice de D dans la base canonique et $\forall g \in G, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i(g)^n \in K$ car $\lambda_i(g)$ est l'exposant de G . On a alors $\text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(g)$ qui est un multiple de G car $\text{tr}(D) \in K$. G est isomorphe à un sous-groupe de U_n .

II - Parties Génératrices de $SL_n(K)$ et $GL_n(K)$

Déf : On appelle matrices de transvection les matrices de la forme $I_n + \lambda E_{ij}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$ et les matrices de dilatation les matrices λE_{ii} avec $\lambda \in K$.

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ sont équivalents :

- (i) $u \in GL(E)$
- (ii) $\ker u = \{0\}$ (ou u injectif)
- (iii) $\text{Im } u = E$ (ou u surjectif)
- (iv) $\det(u) \neq 0$
- (v) u transforme toute base de E en une base de E .
- (vi) $\exists v \in \mathcal{L}(E)$, $uv = id$ (admet un inverse à droite)
- (vii) $\exists w \in \mathcal{L}(E)$, $wu = id$ (inverse à gauche)

2) Quelques Sous-Groupes Particuliers

On pose $SL(E) := \{u \in \mathcal{L}(E), \det(u) = 1\}$ et $SL_n(K) = \{M \in M_n(K), \det(M) = 1\}$.

Théorème : $SL(E)$ est un sous-groupe distingué de $GL(E)$ isomorphe à $SL_n(K)$ (qui est aussi distingué dans $M_n(K)$). De plus, le groupe quotient $\frac{GL(E)}{SL(E)}$ est isomorphe à K^* .

Rapportons : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ sont équivalents :

- (a) u est une homothétie (λid) et stabilise toute droite de E (à l'exception de $\{0\}$).

Thm: 1) $GL_n(\mathbb{R})$ est engendré par les translations et dilatations.

2) $SL_n(\mathbb{R})$ est engendré par les translations

DEV2

Applications: $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ et continue (par arcs)

$\varphi: GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$.

III - Topologie Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Ex: $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim finie.

Def: $\mathcal{L}(E)$ (ou $\mathcal{L}(E)$) est l'ensemble des applications linéaires continues de E dans E , muni de la norme

définie par: $\forall u \in \mathcal{L}(E), \|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

R.q: On a $\|1\| = 1$ et $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$ on a $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$\mathcal{L}(E)$ est une algèbre normée.

Thm: $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach.

R.q: $u \in GL(E)$ signifie u linéaire, continue, bi et d' inverse u^{-1} continue.

Lemme: $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ l.a. $\|u\| < 1$, l'endomorphisme $Id - u$ est dans $GL(E)$ d'inverse $\sum_{k=0}^{\infty} u^k$.

Thm: $GL(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$

Thm: $GL(E)$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$ et $u \mapsto u^{-1}$ est continue sur $GL(E)$

Applications: le déterminant est $\mathbb{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

IV - Groupe Orthogonal ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

1) Généralité sur le groupe orthogonal

Thm: Une isométrie est un automorphisme de E et $O(E)$ est un s-s-groupe de $GL(E)$.

Thm: Soit u une isométrie de E . Si F est un s-s-e de E stable par u , alors son orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u .

Thm: Soient $B = (e_i)$ une b.o.n. de E et u une application linéaire de E dans E . L'application u est une isométrie ssi elle transforme B

en une b.o.n. de E .

En terme de matrice, la symétrie ssi ${}^tAA = A^tA = Id$ avec A la matrice de u dans B .

Def: On appelle matrice orthogonale, une matrice réelle A l.q. ${}^tAA = A^tA = Id$.

Thm: $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A) = \pm 1$ et $O_n(\mathbb{R})$ est un s-s-g de $GL_n(\mathbb{R})$.

Cor: $\forall u \in O(E)$, on a $\det(u) = \pm 1$.

Def: On note: $O^+(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}$ et $O^-(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = -1\}$.

On dit que les éléments de $O^+(E)$ sont les automorphismes orthogonaux positifs ou les symétries directes ou les rotations vectorielles. Les éléments de $O^-(E)$ sont des automorphismes orthog. -enaxe négatifs.

2) Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$

Def: Si F est un s-s de E , la symétrie orthogonale par rapport à F est l'application $S_F := Pf - P_F^\perp$.

(où P_F est la projection orthogonale sur F)

R.q: On a $S_F^2 = Id_E$, $S_F = 2P_F - Id_E = Id_E - 2P_{F^\perp}$. De plus, $S_F \in O(E)$.

Def: On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Thm: $O(E)$ est engendré par les réflexions. De plus, toute isométrie peut s'écrire comme produit d'un plus ou réflexions.

Def: On appelle retournement toute symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Thm: $SO(E)$ est engendré par les retournements. De plus, toute isométrie de $SO(E)$ peut s'écrire comme produit d'un plus ou retournements.

On pose $J_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

3) Topologie de $O(E)$

Thm: $O(E)$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.

Def: Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. positive stricte) si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAX \geq 0$ (resp. ${}^tXAX > 0$) ($\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives).

Thm: (Spectral)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ tel que tOAO soit diagonale.

Corollaire: (Diagonalisation simultanée de matrices symétriques)

Soit $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $I \neq \emptyset$. Les A_i commutent deux à deux si et seulement si il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $i \in I$, tOA_iO soit diagonale.

Théorème: (Décomposition Polaire)

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire

$A = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

De plus, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, la décomposition est unique.

DEF 3

Lemme 1: $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Lemme 2: (Paire carrée positive)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. On dit que B est la racine carrée positive de A .

Théorème: L'application $O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \mapsto OS$ est un $\mathcal{C}^1$ -diffeomorphisme.

Application: $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$. (Pour tout groupe compact G tel que $O_n(\mathbb{R}) \subset G \subset GL_n(\mathbb{R})$, on a : $G = O_n(\mathbb{R})$).