

2.2.3: Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence, Exemples et appl^o.

Sauf mention du contraire, K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le terme "suite numérique" désigne une suite à valeur dans K .

I. Convergence des suites numériques.

A) Limite d'une suite numérique [ROH] p. 205 et [HAU] p. 101.

Def^o 1: On dit qu'une suite $(x_n) \subset K$ converge vers $l \in K$ (appelée limite de la suite de (x_n)) si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$.

Notat^o: On note indifféremment $x_n \rightarrow l$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Th²: (unicité de la limite). Soit $(x_n) \subset K$. Si $x_n \rightarrow l \in K$ et $x_n \rightarrow l' \in K$, alors $l = l'$.

Def^o 3: On dit que $(x_n) \subset K$ est convergente si il existe $l \in K$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$. Sinon, on dit que (x_n) diverge.

Exemple 4: $(1 + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ converge tandis que $(\sqrt{n})_{n \geq 1}$ diverge.

Proposit^o 5: Toute suite numérique convergente est bornée.

Contre-exemple 6: $(-1)^n_{n \geq 0}$ est bornée mais ne converge pas.

Proposit^o 7: Soit $(u_n), (v_n) \subset K$ et soit $l, l', \lambda \in K$.

Si $u_n \rightarrow l$ et $v_n \rightarrow l'$, alors $u_n + \lambda v_n \rightarrow l + \lambda l'$ et $u_n v_n \rightarrow ll'$.

Def^o 8: On dit que $(x_n) \subset K$ converge vers $l \in K$ au sens de Césaro si la suite $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k)_{n \geq 1}$ converge vers l .

Th³: (Césaro). Si (x_n) converge vers $l \in K$, alors (x_n) converge vers l au sens de Césaro.

Contre-exemple 1^o: $(-1)^n_{n \geq 1}$ converge vers 0 au sens de Césaro mais ne converge pas.

B) Valeurs d'adhérence. [ROH], [HAU].

Def^o 11: On appelle sous suite de $(x_n) \subset K$ toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})$ où $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Th¹²: Soit $(x_n) \subset K$ une suite qui converge vers $l \in K$. Alors, toutes sous suites de (x_n) convergent vers l .

Def^o 13: Soit $(x_n) \subset K$ une suite. On dit que $a \in K$ est une valeur d'adhérence de (x_n) si il existe $(x_{\varphi(n)})$ une sous suite de (x_n) telle que $x_{\varphi(n)} \rightarrow a$.

Proposit^o 14: Si $(x_n) \subset K$ converge vers $l \in K$, alors l est l'unique valeur d'adhérence de (x_n) .

Exemple 15: $(-1)^n_{n \geq 0}$ diverge.

Contre-exemple 16: la suite $(n(1 + (-1)^n))_{n \geq 0}$ admet 0 pour unique valeur d'adhérence mais ne converge pas.

Proposit^o 17: Pour qu'une suite $(x_n) \subset K$ converge, il faut et il suffit que les deux suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent toutes 2 vers l .

II. Suites numériques réelles.

A) Suites convergentes. [ROM - An. réelle]

Th¹⁸: Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}$ convergeant vers un réel l . Soit $a \in \mathbb{R}$.

① Si $l > a$ (resp. $l < a$), alors $x_n > a$ (resp. $x_n < a$) à partir d'un certain rang.

② Si $x_n > a$ (resp. $x_n < a$) APCA, alors $l \geq a$ (resp. $l \leq a$).

Th¹⁹: Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles telles que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang. Si (v_n) et (w_n) convergent vers un même réel l , alors $u_n \rightarrow l$.

Def^o 20: Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}$. On dit que (x_n) tend vers $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, x_n \geq M$.

Rq: On adapte la déf^o précédente pour $-\infty$.

Notat^o: $x_n \rightarrow +\infty$.

Rq: Si $x_n \rightarrow +\infty$, alors (x_n) est non bornée donc (x_n) diverge.

Th²¹: Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}$ et $(v_n) \subset \mathbb{R}_+$. Si ① $|u_n| \geq v_n$ APCA et ② $v_n \rightarrow +\infty$, alors (u_n) diverge.

Exemple 22: $(n(-1)^n)_{n \geq 1}$ diverge.

B) Suites monotones.

Def^o 23: On dit que $(u_n) \subset \mathbb{R}$ est croissante (resp. décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$).

Def^o 24: On dit que $(u_n) \subset \mathbb{R}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Th 25: Pour qu'une suite $(x_n) \subset \mathbb{R}$ croissante soit convergente, il faut et il suffit qu'elle soit majorée. On a alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$.
Sinon, $x_n \rightarrow +\infty$.

Rq: On adapte ce cas (x_n) décroissante.

Exemple 26: la suite $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2})_{n \geq 1}$ converge.

Def 27: Deux suites $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ sont dites adjacentes si:

- ① (x_n) est croissante
- ② (y_n) est décroissante
- ③ $x_n - y_n \rightarrow 0$.

Lemme 28: Si $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ sont adjacentes, alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq y_n$.

Proposit° 29: Deux suites réelles $(x_n), (y_n)$ adjacentes convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq l \leq y_n$.

Exemple 30: $(1 + \frac{1}{n^2})_{n \geq 1}$ et $(1 - \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

C) Suites bornées. [RMT - An. réelle], [RMT - An. probas].

Th 31: De toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone.

Th 32: (Bolzano - Weierstrass). De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous-suite qui converge.

Th 33: Une suite réelle est convergente si, et seulement si, elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Appl° 34: Soit $(m_n) \subset \mathbb{R}$ et $(\sigma_n^2) \subset \mathbb{R}_+$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que ① $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ et ② $X_n \xrightarrow{d} X$ où X est une variable aléatoire réelle.
Alors, $m_n \rightarrow m, \sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2$ et $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. **DEV 4**

Def 35: Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}$ une suite bornée. On pose alors pour $n \in \mathbb{N}$, $\bar{u}_n = \sup_{p \geq n} u_p$ et $\underline{u}_n = \inf_{p \geq n} u_p$.

Lemme 36: $(\bar{u}_n)$ est décroissante minorée et $(\underline{u}_n)$ est croissante majorée.

Proposit° 37: les suites $(\underline{u}_n)$ et $(\bar{u}_n)$ convergent.

Def 38: On pose $\liminf u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{u}_n$ et $\limsup u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n$.
appelées respectivement limite inférieure et limite supérieure de u_n .

Th 39: $\liminf u_n$ (resp. $\limsup u_n$) est la plus petite (resp. la plus grande) valeur d'adhérence de la suite (u_n) .

Rq: Si (u_n) n'est pas bornée, alors ou bien elle n'est pas majorée et $+\infty$ est valeur d'adhérence ou bien elle n'est pas minorée et $-\infty$ est valeur d'adhérence. On étend alors la définition de $\liminf$ et $\limsup$ à toutes les suites réelles.

Th 40: une suite $(u_n) \subset \mathbb{R}$ converge si et seulement si $\lim u_n = \limsup u_n$.

Appl° 41: [Gian 3] p 171. Soit $x_0, x_1 > 0$ et pour $n \geq 0, x_{n+2} = \frac{2}{x_{n+1} + x_n}$.
la suite (x_n) converge vers 1.

III. Séries numériques.

A) Généralités. [RMT - Ana. Probas], [

Def 42: On appelle série de terme général (u_n) la suite (S_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On la note $\sum u_n$ et S_n est appelée somme partielle d'ordre n de $\sum u_n$.

Def 43: On dit que $\sum u_n$ converge si la suite (S_n) converge. et dans ce cas on note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sa somme.

Exemple 44: $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Th 45: (lien suite - série). L'opération de dérivée discrète

$$\Delta: K^{\mathbb{N}} \rightarrow K^{\mathbb{N}} \quad (u_n) \mapsto (\Delta u_n) : \begin{cases} \Delta u_n = u_n - u_{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ \Delta u_0 = u_0 \end{cases}$$

realise une bijection de $K^{\mathbb{N}}$ sur lui-même avec

$$\Delta^{-1}: K^{\mathbb{N}} \rightarrow K^{\mathbb{N}} \quad (u_n) \mapsto \sum u_n - u_{n-1}$$

Corollaire 46: (u_n) converge si, et seulement si, $\sum u_n - u_{n-1}$ converge.

Appl° 47: Soit $(a_n) \subset \mathbb{R}_+^*$. On considère (α_n) donnée par $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ et la relation $\alpha_{n+1} = \alpha_n + a_n \alpha_{n-1}$. Alors (α_n) converge si, et seulement si $\sum a_n$ converge.

Proposit° 48: Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Contre-exemple 49: [HAU] p. 111 $\sum \frac{1}{n}$ diverge mais $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

B) Comparaison des séries à termes positifs. Gian3 + Rom An-Probas

Proposition 50: Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}_+$. Alors (S_n) est croissante et on a

la dichotomie suivante:

- ou bien (S_n) est majorée et donc $\sum u_n$ converge on note $\sum u_n < +\infty$.
- ou bien (S_n) n'est pas majorée et $S_n \rightarrow +\infty$. on note alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$.

Th 51: Soit $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries à termes positifs tels que $u_n \leq v_n$. Alors:

- ① Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = +\infty$.
- ② Si $\sum v_n < +\infty$ alors $\sum u_n < +\infty$ et on a $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Th 52: Soit $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries à termes positifs tels que $u_n \sim v_n$. Alors:

- ① $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature i.e.
- ② en cas de convergence, on a $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$
- ③ en cas de divergence, on a $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.

Exemple 53: $\sum \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$ si, et seulement si $\alpha > 1$.

Lemme 54: Soit $\alpha > 1$. Alors $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.

Appl° 55: Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Alors il existe $\gamma > 0$ tel que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad \text{DEV 2}$$