

I. Développements limités.

[R6AR] p. 303

A) Comportement d'une fonction au voisinage d'un point

Def 1: On dit que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un développement limité à l'ordre n en a si il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ et $\forall x \in I, f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$

Rq: lorsqu'il existe, ce développement est unique. De plus, on notera $f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n)$

Exemple 2: $\forall n, \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$

Th 3: (Taylor-Young) Si f est dérivable à l'ordre n en a , elle admet alors, au voisinage de a , le dev. limité d'ordre n : $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$

Exemple 4: Cela donne les développements limités usuels donnés en Figure 1.

Rq: Cette formule n'est cependant pas très pratique pour calculer des DL. De plus, la fonction peut admettre un DL sans être dérivable. Mais on peut se servir de ces DL usuels.

Propositi 5: (opérations sur les DL). Soit f, g admettant des DL d'ordre n .

- ① $(f+g)(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$
- ② $(fg)(x) = R(x) + o(x^n)$ où R est la troncation de $P \cdot Q$.
- ③ $(f \circ g)(x) = R(x) + o(x^n)$ où R est la troncation de $P \circ Q$.

Exemple 6: ① $\cos(\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!} + o(x^n)$

② $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$

③ $\frac{e^x}{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$

④ $\sin(\sin(x)) - \sin(x) = -\frac{1}{4!}x^7 + \frac{1}{1575}x^{11} + o(x^{14})$

B) Développements asymptotiques de suites définies par récurrence

[FGN 3] p. 142

Th 7: (lemme de l'écrasé). Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c$. Alors $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c$.

Th 8: Soit $c > 0$ et $f: [c, \infty) \rightarrow [0, c]$ une fon^l continue admettant un DAS $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$, $a > 0$, $\alpha > 1$. Alors, il existe u_0 tel que la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0.

Exemple 9: ① Si $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}}$

② Si $u_{n+1} = f_n(1+u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+$, alors $u_n \sim \frac{2}{n}$. En passant le DAS de la fonction f , on peut alors obtenir un DAS de (u_n) plus précis:

Exemple 10: Si $u_n = \ln(u_{n-1})$, $u_0 = a \neq 0$. Alors, $u_n = \sqrt{\frac{3}{2n}} - \frac{3\sqrt{6} \ln(n)}{80 n^{3/2}} + o(\frac{\ln(n)}{n^{3/2}})$

Rq: Il est possible d'adapter ces idées au cas où $u_n \rightarrow \infty$.

Exemple 11: Si $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, $u_0 > 0$, alors, on a: $u_n \sim \sqrt{2n}$

II. Comparaisons.

des relations de comparaison.

A) Sommation:

Th 12: Soit $(u_n), (v_n) \subset \mathbb{R}_+$ telles que $u_n \sim v_n$.

① Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge et on a: $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$

② Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge et on a: $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$

GN33 148 Exemple 13: Soit $u_0 \in \mathbb{R}$, et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Alors, on a:
 $u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

GN33 220 Exemple 14: Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $\frac{f'}{f} \sim \frac{1}{x}$.
 Alors, $\sum f(n)$ converge et $\sum_{k=n}^{\infty} f(k) \sim f(n)$.

GN33 220 Applicat° 15: $\sum_{p=n}^{\infty} e^{-p^2} \sim e^{-n^2}$.

Exemple 16: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

B) Comparaison série / intégrale. (GN33)

th17: Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante.
 Alors, $\sum f(n)$ a même nature que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et on a en cas de convergence $\sum_{n \geq 1} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n \geq 1} f(n-1)$.

Exemple 18: (Développement asymptotique de la série Harmonique)
Remarque: Soit $\alpha > 1$. Alors $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Alors, il existe $\gamma > 0$ tel que
 $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. DEV 1

Exemple 19: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$. Alors,
 $u_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. (Gw) p. 163

C) Intégrales des relations comparaison.
 Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $b \leq +\infty$. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux.

th20: ① Si $\int_a^b g$ diverge et si $f \sim g$, alors $\int_a^b f \sim \int_a^b g$.

② Si $\int_a^b g$ converge, et si $f \sim g$, alors $\int_a^b f \sim \int_a^b g$.

Exemple 21: Soit $\forall x \geq 2$, $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$. Alors,
 $Li(x) = \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln^2(x)} + \frac{2x}{\ln^3(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^3(x)}\right)$. (Gw) p. 173

III. Intégrales à paramètres.

A) Méthode de Laplace. [FAR], [Gw].
 Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Soit $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$.

Posons $F: \lambda \mapsto \int_\alpha^\beta e^{-\lambda \varphi(x)} f(x) dx$. Supposons avoir de φ
 $\forall \lambda > \lambda_0$, $\int_\alpha^\beta e^{-\lambda \varphi(x)} |f(x)| dx < +\infty$.

th22 Supposons $\varphi \in \mathcal{C}^2$, f continue en a et $f(a) \neq 0$. Si $\varphi'_0 > 0$,
 Soit $\exists a, b \in \mathbb{C}$ et $\varphi'(a) = 0$, $\varphi''(a) > 0$. Alors,
 $F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} e^{-\lambda \varphi(a)} f(a)$.
 Rq: Méthode dans cette leçon peut être une version plus précise et applicable.
 $\lambda \mapsto \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} dt$

Exemple 23: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.
 On peut alors obtenir le D.A. $\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + o(1)$. [FAR]

B) Méthode de la phase stationnaire.
 On s'intéresse maintenant à $F(\lambda) = \int_\alpha^\beta e^{i\lambda \varphi(x)} f(x) dx$.

th24: On suppose $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ et que:

① φ est $\mathcal{C}^4$ sur $[\alpha, \beta]$ et $\varphi'(\alpha) = 0$, $\varphi'(x) \neq 0$ sur $]\alpha, \beta[$, $\varphi'(\beta) \neq 0$.

② f est $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta]$.

Alors, $F(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\alpha)}{\sqrt{|\varphi''(\alpha)|}} e^{i(\lambda \varphi(\alpha) + \sigma \frac{\pi}{4})} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$

où $\sigma = 1$ si $\varphi''(\alpha) > 0$ et $\sigma = -1$ si $\varphi''(\alpha) < 0$.

Exemple 25: Posons $J(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{i\lambda \cos(x)} dx$.
 Alors, $J(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

IV - Théorie analytique des nombres

A) Principe de l'hypothèse $[T, EN] p. 37$

Étant donné $f, g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ 2 fonctions arithmétiques, on définit la convolution de Dirichlet de f et g par $f * g(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$. On note δ le neutre de la convolution.

Th 26: Soit f, g 2 fonc^o arithmétiques, de fonc^o sommatoire F et G . On a par $1 \leq x \leq y$, $\sum_{n \leq x} f * g(n) = \sum_{n \leq y} g(n) F(\frac{x}{n}) + \sum_{\substack{m \leq \frac{x}{y}}} f(m) G(\frac{x}{m}) - F(\frac{x}{y}) G(y)$.

Def 27: On note τ la fonction ^{nombre de} diviseurs de $n \in \mathbb{N}$: $\tau(n) = \# \{d \leq n / d|n\}$.

Rq: On a $\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = 1 * 1$.

Th 28: $\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln(x) + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$.

B) Fonctions de Möbius et autres ondes moyennes

On définit la fonc^o de Möbius par $\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)} & \text{si } n \text{ est sans facteur carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ où $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$.

Def 29: Soit f une fonction arithmétique. On appelle série de Dirichlet associée à f la série:

$D(f) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ et pour 2 fonc^o arithmétiques f et g , on a par $\sum_{n \geq 1} \frac{f * g(n)}{n^s} = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} \right) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{g(n)}{n^s} \right)$.

Avec cela, on peut étudier le développement asymptotique de certaines fonctions arithmétiques.

Proposition 30: $\mu * 1 = \delta$.

Exemple 31: (Indicateur d'Euler)

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \ln(x)).$$

Exemple 32: (Entiers sans facteur carré).

$$\sum_{n \leq x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x}).$$

et on en déduit que $\sum_{n \leq x} 2^{\omega(n)} = \frac{6}{\pi^2} x \ln(x) + O(x)$.

Exemple 33: $\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{1}{12} \pi^2 x^2 + O(x \ln(x))$

$$\text{où } \sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Rq: On connaît aujourd'hui de meilleures séries de μ mais ces derniers sont très difficiles à obtenir.