

# Fonctions et espaces de fonctions lebesgue intégrables.

236

Soit  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré  $\sigma$ -fini.

## I. Intégrale de Lebesgue.

### A) Intégrale des fonctions mesurables positives.

**Def° 1** : Soit  $f = \sum a_i 1_{A_i} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  étagée.

On définit l'intégrale de  $f$  qu'on note  $\int_X f d\mu$  par :

$$\int_X f d\mu = \sum a_i \mu(A_i) \in [0, +\infty].$$

**Def° 2** : Soit  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  mesurable. On définit l'intégrale

$$\text{de } f \text{ par : } \int_X f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ étagée} \\ 0 \leq g \leq f}} \int_X g d\mu.$$

**Proposit° 3** : Soit  $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$  mesurables. Alors,

$$\textcircled{1} \int f + g = \int f + \int g. \quad \textcircled{2} \text{ Si } f \leq g, \text{ alors } \int f \leq \int g.$$

$$\textcircled{3} \int \lambda f = \lambda \int f. \quad \textcircled{4} \int f = 0 \text{ ssi } f = 0 \text{ p.p.}$$

**Exemple 4** :  $\textcircled{1}$  Si  $\delta_a : A \mapsto 1_A(a)$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable,

$$\text{alors } \int_X f(n) d\delta_a(n) = f(a)$$

$\textcircled{2}$  Si  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$  avec  $m$  la mesure de comptage, alors

$$\int_{\mathbb{N}} f(n) dm(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) \in [0, +\infty].$$

### B) Convergence monotone et lemme de Fatou.

**Ths** : (Convergence monotone) Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs positives qui converge simplement vers  $f$ . Alors  $f$  est mesurable positive et  $\int f_n \rightarrow \int f \in [0, +\infty]$ .

**Lemme 6** : (Fatou) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mesurables. Alors,

$$\int_X \liminf f_n \leq \liminf \int_X f_n \text{ dans } [0, +\infty].$$

### C) Espace $L^1$ des fonctions intégrables

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Posons  $f^+ = \max(f, 0)$  et  $f^- = \max(-f, 0)$ .

**Rq** : Si  $f$  est mesurable,  $f^+, f^-, |f|$  sont mesurables positives.

**Def° 7** : On dit que  $f$  est intégrable si elle est mesurable et si

$$\int_X |f| < +\infty. \text{ On pose alors } \int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

**Notation** : On note  $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$  l'ensemble des fonctions intégrables.

**Def° 8** : On dit de même que  $f$  est de puissance  $p$ -ième intégrable si  $|f|^p$  est intégrable.

**Rq** : Si  $\mu$  est une mesure finie,  $L^1(X) \subset L^2(X) \subset \dots$

**Proposition 9** :  $L^1$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

$\textcircled{1} f \mapsto \int_X f d\mu$  est linéaire de  $L^1$  dans  $\mathbb{R}$ .

$\textcircled{2}$  Si  $f \leq g$ , alors  $\int f \leq \int g$ .

$$\textcircled{3} \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

### D) Espace $L^1$

La relation d'égalité presque partout notée  $f = g$  p.p. est une relation d'équivalence sur  $L^1$  et on définit alors :

**Def° 10** :  $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$  ou  $L^1$  si il n'y a pas d'ambiguïté comme l'ensemble des classes d'équivalence de la relation  $=$  p.p. On définit alors par  $\tilde{f} \in L^1$ ,  $\int_X \tilde{f} = \int_X g$  où  $g$  est un représentant quelconque de  $\tilde{f}$ .

**Rq** : On définit de la même manière les espaces  $L^p$ .

**Proposit° 11** :  $\| \cdot \|_1 : f \in L^1 \mapsto \int |f| \in \mathbb{R}$  est une norme

sur  $L^1$  et  $f \mapsto \int_X f$  est linéaire continue.

**Rq** : De même  $\| \cdot \|_p : f \in L^p \mapsto \left( \int_X |f|^p \right)^{1/p}$  fait de  $L^p$  un espace normé.

## II. Théorèmes fondamentaux.

### A) Th. de convergence dans $L^1$ .

**Th 12** : (Convergence dominée) Soit  $(f_n) \subset L^1$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

mesurable telle que :  $\textcircled{1} f_n \rightarrow f$  p.p.

$\textcircled{2} \exists \varphi \in L^1$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$  p.p.

Alors  $f \in L^1$  et  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^1$ . Il vient donc  $\int f_n \rightarrow \int f$ .

**Exemple 13** :  $\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx \rightarrow \int_0^1 e^{-x/2} dx = 2$ .

**Th 14** : Soit  $(f_n) \subset L^1$  telle que  $\sum \|f_n\|_1 < +\infty$ . Alors,

$\textcircled{1} \exists \varphi \in L^1$  tq  $|\sum_{k=0}^n f_k| \leq \varphi$  p.p.  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  $\textcircled{2} \sum_{k=0}^n f_k(x)$  est convergente p.p.

$\textcircled{3}$  Si  $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ , alors  $f \in L^1$  et  $\sum_{k=0}^n f_k \rightarrow f$  dans  $L^1$ .

**Th 15: (Riesz-Fisher)** pour  $p \in [1, +\infty]$ , l'espace  $L^p$  est complet.

**Th 16:**  $L^2$  est un espace de Hilbert.

**B) Théorèmes de régularité sans le signe intégrale.**

Soit  $\Lambda$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f: X \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall d \in \Lambda$ ,  $x \mapsto f(x, d)$  soit intégrable.

Posez  $F(d) = \int_X f(x, d) d\mu(x)$ .

**Th 17: (Continuité sans le signe intégrale)** Supposons que:

- ① pour presque tout  $x$ ,  $d \mapsto f(x, d)$  est continue sur  $\Lambda$ .
  - ② pour tout compact  $K \subset \Lambda$ , il existe  $\varphi_K$  intégrable sur  $X$  et positive telle que  $\forall x \in X, \forall d \in K, |f(x, d)| \leq \varphi_K(x)$ .
- Alors,  $F$  est continue sur  $\Lambda$ .

**Exemple 18:** Si  $f \in L^1$ , alors  $\mathcal{L}(f): x \mapsto \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} dt$  appelé transformée de Laplace de  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Th 18: (Dérivabilité sans le signe intégrale)** Supposons que:

- ① pour presque tout  $x \in X$ ,  $d \mapsto f(x, d)$  est dérivable sur  $\Lambda$ .
- ② pour tout compact  $K \subset \Lambda$ ,  $\exists \varphi_K$  intégrable sur  $X$  et positive telle que pour tout  $x$  pour lequel  $d \mapsto f(x, d)$  est dérivable et  $\forall d \in K$ ,  $|\frac{\partial f}{\partial d}(x, d)| \leq \varphi_K(x)$ .

Alors,  $F$  est dérivable sur  $\Lambda$  et  $\forall d \in \Lambda, F'(d) = \int_X \frac{\partial f}{\partial d}(x, d) d\mu(x)$ .

**Exemple 19:** la fonction  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  appelé fonction  $\Gamma$  d'Euler est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .

**Application 21: (Moment d'une variable aléatoire). DEV 1**

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  un espace probabilisé et  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle. Notons  $\varphi_X$  sa fonction caractéristique. Si  $X$  admet un moment d'ordre  $n$ , alors  $\varphi_X$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et, pour tout  $k \leq n, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} X^k(\omega) e^{itX(\omega)} d\mu(\omega)$ .

**C) Théorèmes de Fubini.**

Soit  $(Y, \mathcal{U}, \nu)$  un deuxième espace mesuré  $\sigma$ -fini.

**Th 22: (Fubini-Tonelli)** Soit  $f: X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$  mesurable pour la tribu  $\mathcal{T} \otimes \mathcal{U}$ . Alors, ①  $\forall x \in X, y \mapsto f(x, y)$  est mesurable pour  $\mathcal{U}$  et  $\forall y \in Y, x \mapsto f(x, y)$  est mesurable pour  $\mathcal{T}$ . ② la fonction  $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  est mesurable pour  $\mathcal{T}$  et la fonction  $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$  est mesurable pour  $\mathcal{U}$ .

$$\textcircled{3} \text{ On a l'égalité } \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \nu(x, y) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

**Th 23: (Fubini-Lebesgue)** Soit  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable pour la mesure  $\mu \otimes \nu$ . Alors, ① pour presque tout  $x \in X, \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) < +\infty$  ② pour presque tout  $y \in Y, \int_X |f(x, y)| d\mu(x) < +\infty$ .

③  $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  est intégrable pour  $\mu$  et  $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$  est intégrable pour  $\nu$  et on a l'égalité:

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \nu(x, y) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

**Exemple 24:** ①  $\int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ .

②  $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**III. Convolution et transformée de Fourier.**

**A) Convolution, régularisation et densité.**

Soit  $p \in [1, +\infty]$ , tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ .

**Def 25:** Le produit de convolution de  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  et  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ , est la fonction  $f * g$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  par  $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x-t) dt$ . On a alors  $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .

**Propos 26:** Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  et  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ ,  $f * g(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} 0$ .

**Def 27:** on appelle approximation de l'unité toute suite  $(\alpha_n)$  tq ①  $\alpha_n \geq 0, \forall n$ . ②  $\|\alpha_n\|_1 = 1, \forall n$ , ③  $\forall \delta > 0, \int_{|t| \leq \delta} \alpha_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

Propositi<sup>o</sup> 28: Soit  $p \in [1, +\infty]$  et  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $(\alpha_n)$  une approximation de l'unité. Alors,  $\|f * \alpha_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Corollaire 29:  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  sont denses dans  $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d)$ .

Proposition 30: Si  $f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  et  $f * g(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$  pour tout  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $g \in L^q(\mathbb{R})$ .

Notat<sup>o</sup>: On notera  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  telles que  $f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ .

Proposition 31: Si  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $g \in L^q(\mathbb{R})$ , alors,  $f * g$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ .

B) Transformée de Fourier.

Def<sup>o</sup> 32: Pour  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on définit la transformée de Fourier de  $f$  par:  $\hat{f}: \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt$ .

Notation: On note  $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$  la transformée de Fourier.

Exemple 33:  $x \mapsto \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) = x \mapsto 2 \frac{\sin(x)}{x}$ .

Lemme 34: (Riemann-Lebesgue).  $\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ .

Notation: Pour  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on note  $\check{f}: \mathbb{R} \mapsto f(-x)$ .

Th 35: Soit  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$ .

Th 36:  $\mathcal{F}$  est linéaire continue de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  et  $\|\mathcal{F}\| = 1$ .

Th 37: (Formule d'inversion). Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et si  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  alors  $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{i\pi xy} dy = \hat{\hat{f}}(x)$  p.p.

Th 38:  $\mathcal{F}$  est injective.

Proposition 39:  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  est dense dans  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ .

Th 40: (Plancherel). DEVL

Si  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  et,  $\|f\|_2 = \sqrt{2\pi} \|\hat{f}\|_2$ . En particulier,  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

Th 41:  $\mathcal{F}$  se prolonge de manière unique en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de  $L^2(\mathbb{R})$  dans lui-même.

Proposition 42: ①  $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \overline{2\pi} \text{id}_{L^2}$ .  
②  $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}), \hat{f} * \hat{g} = \overline{2\pi} \hat{fg}$ .