

I. Intervention entre limites.

Soit X un ensemble non vide. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.
Soit $f: X \rightarrow E$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

A) Convergence unif. et double limite.

Def°1: On dit que (f_n) converge simplement vers f sur X si $\forall x \in X, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.

Notation: $f_n \xrightarrow{cv} f$ sur X .

Def°2: On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur X si $\|f_n - f\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Notat°: $(f_n) \xrightarrow{cvu} f$ sur X .

Rq: On adapte ces définitions aux séries de fonctions.

Def°3: On dit que la série de fonction $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur X si:

① $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{B}(X, E)$

② $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_X < +\infty$.

Proposit°4: Si $(f_n) \xrightarrow{cvu} f$ sur X , alors $(f_n) \xrightarrow{cv} f$ sur X .

Contre exemple 5: La suite de fonction $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers S_1 mais ne converge pas uniformément.

Proposition 5: Si $\sum f_n \xrightarrow{cvu}$ sur X , alors $\sum f_n$ converge unif. sur X .

Th 6: (Critère de Cauchy uniforme). On suppose que E est un espace de Banach. Alors (f_n) converge uniformément si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall p, q \geq N, \forall x \in X, \|f_p - f_q\|_X \leq \varepsilon$.

Th 7: (double limite). On suppose que $X \subset F$ un espace normé. et que E est complet. Soit $a \in X$. Si:

① $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite $\ell_n \in E$ en a ,

② La suite (ℓ_n) converge unif. vers ℓ sur X .

Alors, (f_n) admet une limite $\ell \in E$ et la fonction f admet ℓ comme limite en a .

B) Continuité.

On suppose toujours que $X \subset F$.

Th 8: Si (f_n) converge unif. vers f sur X et que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en un point $a \in X$, alors f est continue en a .

Exemple 9: $(x \mapsto e^{-nx})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $1_{\{0\}}$ sur $\mathbb{R}_+$. $1_{\{0\}}$ n'est pas continue donc la convergence n'est pas unif.

Th 10: (Dini). Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit $([a, b] \xrightarrow{f_n} f)$ une suite de fonctions continues qui convergent simplement vers une fonction continue f .

① Si (f_n) est croissante, alors la convergence est uniforme.

② Si chaque fonction f_n est croissante sur $[a, b]$, alors la conv. est uniforme.

C) Dérivabilité

On se donne $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $(f_n: I \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Th 11: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que:

① $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est dérivable sur I .

② $(f_n) \xrightarrow{cv} f$ sur I .

③ (f'_n) $\xrightarrow{cvu}$ vers une fonction $g: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = g(x)$.

Exemple 12: $x \mapsto (x^2 + \frac{1}{n^2})^{1/2}$ $\xrightarrow{cvu}$ vers $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$. Mais cette dernière n'est pas dérivable en 0.

FGN p 210

[HAJ]

Th 13: Supposons que :

- ① $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est dérivable sur I .
- ② $\sum f_n$ cvs sur I
- ③ $\sum f_n'$ cvs sur I .

Alors, $F: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est dérivable sur I et, $\forall x \in I$,
 $F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$.

II. Interconversion limite et intégrale.

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

A) Convergence sous le signe $\int$. [FAR] p. 17

Th 14: (Convergence monotone). Soit $(f_n: X \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$. Posons $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Alors f est mesurable et
 $\int_X f_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_X f(x) d\mu(x)$.

Rq: Le caractère croissant est essentiel:

Contre-exemple 15: La suite de fonction $f_n = 1_{[n, n+1]}$ n'est pas croissante et met en défaut le th. 14.

Lemme 16: (Fatou). Soit $(f_n: X \rightarrow [0, +\infty])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. Alors,

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

Th 17: (Convergence dominée). Soit $(f_n) \subset L^1(X)$ telle que:

- ① Par presque tout $x \in X, (f_n(x))$ a une limite $f(x)$.
- ② $\exists \varphi \in L^1(X)$ positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, par presque tout $x \in X, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$.

Alors, $\int_X f_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_X f(x) d\mu(x)$.

Exemple 28: $\int_0^1 (1 - \frac{x}{n})^n e^{x/2} dx \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x/2} dx = 2$.

B) Intégrales à paramètre. [FAR] p. 93, [HAU], [Cuv]

Soit Λ un intervalle de $\mathbb{R}$ ou un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f: X \times \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\forall d \in \Lambda, x \mapsto f(x, d)$ est intégrable. Posons $F(d) = \int_X f(x, d) d\mu(x)$.

Th 19: (Continuité). Supposons que:

- ① par presque tout $x \in X, d \mapsto f(x, d)$ est continue sur Λ .
- ② par tout compact $K \subset \Lambda$, il existe une fonction intégrable m_K positive φ_K telle que $\forall x \in X$ et tout $d \in K$, $|f(x, d)| \leq \varphi_K(x)$.

Alors, F est continue sur Λ .

Exemple 20: $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

Th 21: (Dérivabilité). On prend $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

Supposons que:

- ① par presque tout $x \in X, d \mapsto f(x, d)$ est dérivable sur Λ .
- ② $\forall K \subset \Lambda$ compact, il existe $\varphi_K \in L^1$ positive telle que par tout $x \in X$ et $d \mapsto f(x, d)$ est dérivable et tout $d \in K$, $|\frac{\partial f}{\partial d}(x, d)| \leq \varphi_K(x)$.

Alors, F est dérivable sur Λ et on a $F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial d}(x, d) d\mu(x)$.

Exemple 22: La fonction $\Gamma: x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est C^∞ sur $]0, +\infty[$.

App P 23: (Intégrale de Dirichlet). $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Contre-exemple 24: La fonction $f: \mathbb{N} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ sur $\mathbb{N} \times [0, +\infty[$ Mais $n \mapsto \int_0^{+\infty} f(t, n) dt$ n'est pas dérivable.

App 25: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une v. a. r. Notons φ_X la fonction caractéristique. Si X admet un moment d'ordre n , alors φ_X est C^n et $\forall k \leq n, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} d\mathbb{P}$.

Réciproquement, si φ_x est 2n fois dérivable en 0, alors X admet des moments jusqu'à l'ordre 2n.

Th 26: (Holomorphie). Supposons que Λ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Supposons que:

- ① pour presque tout $x \in X$, $d \mapsto f(x, d)$ est holomorphe sur Λ .
- ② $\forall K \subset \Lambda$, compact, il existe $\varphi_K \in L^1$ positive telle que $\forall x \in X$, $\forall d \in \Lambda$, $|f(x, d)| \leq \varphi_K(x)$.

Alors, F est holomorphe dans Λ , et de plus, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(d) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial d^n}(x, d) d\mu(x).$$

Exemple 27: $\Gamma: z \mapsto \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $\{ \operatorname{Re}(z) > 0 \}$ et $\Gamma'(z) = \int_0^\infty \ln(t) t^{z-1} e^{-t} dt$.

Appl° 28: Soit $a, d > 0$.

Th: Si $X \sim \Gamma(a, d)$ et φ_x est la fonction caractéristique de X , alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_x(t) = \left(\frac{d}{d - it} \right)^a$.

Corollaire: X admet des moments de tout ordre et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$E(X^n) = \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{d^n}.$$

DEV 1

III. Interversion intégrale - intégrale. [GW] p. 93.

A) Les théorèmes de Fubini. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{U}, \nu)$ finies.

Th 29: (Fubini-Tonelli). Soit $(X, \mathcal{T}, \mu), (Y, \mathcal{U}, \nu)$ 2 espaces mesurés σ -finies. Soit $f: X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable par la tribu $\mathcal{T} \otimes \mathcal{U}$. Alors

- ① $\forall x \in X$, $y \mapsto f(x, y)$ est mesurable et $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ est mesurable par $\mathcal{T}$.
- ② $\forall y \in Y$, $x \mapsto f(x, y)$ est mesurable par $\mathcal{T}$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ est mesurable par $\mathcal{U}$.
- ③ On a l'égalité:

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \nu(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

$X \times Y$

235

Th 30: (Fubini-Lebesgue). Soit $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable par la mesure $\mu \otimes \nu$. Alors,

- ① pour presque tout $x \in X$, $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable et $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ est intégrable par μ .
- ② pour presque tout $y \in Y$, $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ est intégrable par ν et on a l'égalité:
- ③ $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ est intégrable par μ ; $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ est intégrable par ν et on a l'égalité:

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \nu(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Exemple 31: $\int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ par 2 T.C.L.

Appl° 32: (Formule de Stirling). $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$ DEV 2. [FCN] 6

B) Intégration terme à terme. [FAR]

Th 33: Soit (f_n) une suite de fct° mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$. La fonction $F: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est mesurable et $\int_X F d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$.

Th 34: Soit (f_n) une suite de fct° mesurables. Alors,

- ① $\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu$.
- ② Si les 2 membres sont finis, chaque fct° f_n est intégrable et la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge p.p. Sa somme est intégrable et $\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$.

Th 35: Soit $(u_{p,q})$ une série double à termes complexes. Alors,

- ① $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} |u_{p,q}| = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |u_{p,q}|$.
- ② Si les 2 membres sont finis, on a:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}.$$