

I. Régularité des intégrales à paramètre. [FAR] p. 17, [HAU] p. 225

Soit (X, T, μ) un espace mesuré. Soit Λ un intervalle de $\mathbb{R}$ ou un ouvert de $\mathbb{C}$.

A) Convergence dominée. [FAR] p. 17

Th 1: (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur X vérifiant:

- ① pour presque tout $x \in X$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $f(x)$.
- ② il existe $\varphi \in L^1(X)$ positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$ p.p.

Alors $f \in L^1(X)$ et $\int_X f_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_X f(x) d\mu(x)$.

Exemple 2: $\int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{x/2} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x/2} dx = 2$.

Soit $f: X \times \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\forall d \in \Lambda$, $x \mapsto f(x, d)$ est intégrable sur X . Posons $F(d) = \int_X f(x, d) d\mu(x)$.

B) Continuité. [FAR] p. 35, [HAU] p. 225

Th 3: (Continuité sans le signe) Supposons que:

- ① pour presque tout $x \in X$, $d \mapsto f(x, d)$ est continue sur Λ .
- ② $\forall K \subset \Lambda$ compact, il existe $\varphi_K \in L^1(X)$ positive telle que $\forall x \in X, \forall d \in K, |f(x, d)| \leq \varphi_K(x)$.

Alors F est continue sur Λ .

Exemple 4: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{L}(f): \lambda \mapsto \int_0^{\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt$ appelée transformée de Laplace de f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Contre-exemple 5: Posons $f: [0, +\infty[\times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Alors $f(t, \lambda) \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$. Alors f est continue en 0 mais $\lambda \mapsto \int_0^{\infty} f(t, \lambda) dt$ n'est pas continue.

C) Dérivabilité. [FAR] p. 35, [HAU] p. 226, [FGN] p. 226

On suppose ici que Λ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Th 6: (Dérivabilité sans le signe) Supposons que:

- ① pour presque tout $x \in X$, $d \mapsto f(x, d)$ est dérivable sur Λ .
- ② $\forall K \subset \Lambda$ compact, il existe $\varphi_K \in L^1(X)$ positive telle que pour tout $x \in X$ ou $d \mapsto f(x, d)$ est dérivable et pour tout $d \in K$, $|\frac{\partial f}{\partial d}(x, d)| \leq \varphi_K(x)$.

Alors, F est dérivable sur Λ et $\forall d \in \Lambda$, $F'(d) = \int_X \frac{\partial f}{\partial d}(x, d) d\mu(x)$.

Corollaire 7: (Version $\mathcal{C}^k$) Supposons que:

- ① pour presque tout $x \in X$, $d \mapsto f(x, d)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Λ .
- ② $\forall K \subset \Lambda$ compact, il existe $\varphi_K \in L^1(X)$ telle que pour tout $x \in X$ ou $d \mapsto f(x, d)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et tout $d \in K$, $|\frac{\partial^k f}{\partial d^k}(x, d)| \leq \varphi_K(x)$.

Alors, F est $\mathcal{C}^k$ sur Λ et $F^{(k)}(d) = \int_X \frac{\partial^k f}{\partial d^k}(x, d) d\mu(x)$.

Exemple 8: $\Gamma: \lambda \mapsto \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt$ appelée fonction Γ d'Euler est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Appl 3: (Intégrale de Dirichlet) $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. DEV 1

Rq: en munissant $\mathbb{R}$ de la mesure de comptage, ces théorèmes englobent le cas des séries de fonctions.

Contre-exemple 10: La fonction $f: \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(t, \lambda) \mapsto \lambda^2 e^{-\lambda|t|}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. Mais $\lambda \mapsto \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda|t|} dt$ n'est pas dérivable.

Application 11: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une v.a.r. Notons φ_X sa fonction caractéristique. Si X admet un moment d'ordre n , alors φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et pour tout $k \leq n$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k(\omega) e^{itX(\omega)} dP(\omega)$. Réciproquement, si φ_X est en $\mathcal{C}^n$ fois dérivable, alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2n$.

D. Holomorphie. [FAR] p. 35, [CoH].

Supposons ici que Δ soit un ouvert de $\mathbb{C}$.

th 12: (Holomorphie avec le signe S). Supposons que :

① pour presque tout $x \in X$, $d \mapsto f(x, d)$ est holomorphe sur Δ .

② $\forall K \subset \Delta$ compact, $\exists \varphi_K \in L^1(X)$ positive telle que $\forall x \in X, \forall d \in K$, $|f(x, d)| \leq \varphi_K(x)$.

Alors, F est holomorphe sur Δ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(x) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial d^n}(x, d) d\mu(x)$.

Exemple 13: On peut montrer que $\Gamma: z \mapsto \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ et $\Gamma'(z) = \int_0^\infty \ln(t) t^{z-1} e^{-t} dt$.

Appl. 14: (Fonction caractéristique de la loi Γ). Soit $a, d > 0$.

th: Si $X \sim \Gamma(a, d)$ et φ_X est la f.c.l. caractéristique de X , alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \left(\frac{d}{d - it}\right)^a$.

Corollaire: X admet des moments de tout ordre et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X^n) = \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{d^n}$ DEV 2.

II. Résultats asymptotiques. [Gau], [Rw], [FAR].

A) Intégration des relations de comparaison. [Gau] p. 163.

th 15: Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$) et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ appl. continues par morceaux.

① Si $f = O(g)$ et $\int_a^b g < +\infty$, alors $\int_a^b f(t) dt = O\left(\int_a^b g(t) dt\right)$.

② Si $f = O(g)$ et $\int_a^b g = +\infty$, alors $\int_a^x f(t) dt = O\left(\int_a^x g(t) dt\right)$.

Rg: On adapte le théorème avec o et $\sim$.

Exemple 16: On a $\forall x > 0$, $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right)$ et $\log(x) = o(x^\alpha)$.

B) Intégrale de Laplace. [Rw] p. 349.

th 17: (Méthode de Laplace). Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Soit $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tq $e^{-t_0 \varphi}$ soit intégrable sur $[a, b]$. On suppose f continue en a et $f(a) \neq 0$. Alors, si $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$ et $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, on a $\int_a^b e^{-t \varphi(x)} f(x) dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{t \varphi''(a)}} e^{-t \varphi(a)} \frac{f(a)}{\sqrt{t}}$.

Corollaire 18: (Formule de Stirling) $\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi t} \left(\frac{t}{e}\right)^t$.

C) Intégrale de Fourier.

On considère $F(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda \varphi(x)} f(x) dx$.

Proposil. 19: Si φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ et $\varphi'(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[$, alors $F(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \pm\infty} 0$.

Lemme 20: (Riemann-Lebesgue). Si $\varphi(x) = x$, alors $F(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \pm\infty} 0$.

Proposil. 21: Soit $-\infty < a < b < +\infty$. Soit φ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. On suppose $f \in \mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors, $F(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \left(\frac{f(b)}{\varphi'(b)} e^{i\lambda \varphi(b)} - \frac{f(a)}{\varphi'(a)} e^{i\lambda \varphi(a)} \right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

th 22: (Phase stationnaire). Soit $-\infty < a < b < +\infty$. On suppose que :

① φ est $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et $\varphi'(a) = 0$, $\varphi'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$, $\varphi''(a) \neq 0$.

② f est $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$.
Alors, $F(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{t \varphi''(a)}} \frac{f(a)}{\sqrt{|\varphi''(a)|}} e^{i\left(\lambda \varphi(a) + \frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

au $\sigma = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi''(a) > 0 \\ -1 & \text{si } \varphi''(a) < 0 \end{cases}$.

Exemple 23: $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{i\lambda \cos(x)} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

III. Convolution et transformée de Fourier sur L^1 .

A) Convolution. [BP] p. 300.

On se place sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$.

Def 24: Soit $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ 2 fct° mesurables positives. La convolée de f et g , définie notée $f * g$ est définie par:
 $\forall x \in \mathbb{R}^d, f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy$.

Propo 1° 25: La fct° $x \mapsto f * g(x)$ est bien définie à valeur dans $\mathbb{R}_+$, mesurable, et on a $\int_{\mathbb{R}^d} f * g(x) dx = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \right)$.

Th 26: Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, $f * g$ est bien définie et $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Exemple 27: Si X, Y sont 2 v. a. n, alors indépendantes admettant respectivement f_x et f_y pour densité. Alors, $X+Y$ est à densité et $f_{X+Y} = f_x * f_y$.

B) Approximation de l'unité et régularisation. [BPJ p. 307]

Def 28: On appelle approximation de l'unité toute suite $(\alpha_n) \subset L^1$ tq
 ① $\forall n \geq 1, \alpha_n \geq 0$ ② $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n dx \leq 1$ ③ $\forall \varepsilon > 0, \int_{|x| \geq \varepsilon} \alpha_n dx \rightarrow 0$.

Exemple 29: Si ρ est une fonction mesurable positive, non nulle tq $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = 1$, alors $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$ est une approximat° de l'unité.

Propo 1° 30: Si $f \in L^1$ et (α_n) est une approximat° de l'unité, alors $\alpha_n * f \xrightarrow{L^1} f$.

C) Transformation de Fourier. [FAR] p. 130.

Def 31: Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f}: t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x) dx$.

Propo 1° 32: $\hat{f}$ est continue et $\hat{f}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ et $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

Propo 1° 33: $\mathcal{F}: L^1 \rightarrow \mathcal{C}_0$ est linéaire et continue et $\|\mathcal{F}\| = 1$.

Exemple 34: Si $f(x) = e^{-x^2}$, alors $\hat{f}(x) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Th 35: Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

Th 36: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $x f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est dérivable et $\hat{f}' = -i x \hat{f}$.

Th 37: Posons $\phi_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2 x^2}$.
 et $\phi_n(t) = e^{-\frac{|t|}{n}}$. Alors si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a:
 $\phi_n * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i x t} \phi_n(t) \hat{f}(t) dt$.