

Soit X un ensemble non vide. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\| \in [0, +\infty]$ pour $f: X \rightarrow E$.

I. Modes de convergence des suites et séries de fonct°.

A) Suites de fonctions [ELA] p. 143

Soit $(f_n: X \rightarrow E)_{n \geq 1}$ et $f: X \rightarrow E$.

Def°1: On dit que (f_n) converge simplement vers f sur X si $\forall x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ dans E . On dit alors que f est la limite simple de (f_n) sur X .

Notat°: (f_n) cvs vers f .

Exemple 2: Posons $f_n: [0,1] \rightarrow [0,1]$ et $f = \mathbb{I}_{\{1\}}$.

Alors (f_n) cvs vers f sur $[0,1]$.

Def°3: On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur X si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On dit alors que f est la limite unif. de (f_n) sur X .

Notat°: (f_n) cvu vers f .

Proposil°4: Si (f_n) cvu vers f sur X , alors f converge simplement vers f sur X .

Contre-exemple 5: En reprenant l'exemple 2, on montre que (f_n) ne converge pas unif. vers f sur $X = [0,1]$.

Th 6: (Critère de Cauchy unif.). Supposons que $(E, \|\cdot\|)$ est complet. Pour que la suite (f_n) converge uniformément, il faut et il suffit que $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \forall p, q \geq N, \sup_{x \in X} \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$.

Notons maintenant $B(X, E) = \{f: X \rightarrow E / \|f\|_\infty < +\infty\}$.

Proposition 7: Si $(f_n) \subset B(X, E)$ cvu vers f , alors, $f \in B(X, E)$.

Proposition 8: Si E est complet, alors $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

À partir de maintenant, on supposera E complet.

B) Séries de fonctions. [ELA] p. 193.

Soit $(f_n: X \rightarrow E)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions.

Def°9: On appelle série de fonctions (f_n) et on note $\sum f_n$ la suite de fonctions (S_n) où $S_n: X \rightarrow E$ est définie par $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$. S_n est appelée n -ième somme partielle de la série $\sum f_n$.

Def°10: On dit que $\sum f_n$ converge simplement sur X si (S_n) cvs sur X . La limite simple S de (S_n) est alors appelée fonction somme de la série et notée $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Exemple 11: On a p.ex, $\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx} = \begin{cases} \frac{x}{1-e^{-x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Def°12: On dit que $\sum f_n$ converge uniformément sur X si la suite de fonct° (S_n) converge unif. sur X .

Proposil°13: Si $\sum f_n$ cvu sur X , alors $\sum f_n$ cvs sur X .

Proposil°14: Si $\sum f_n$ cvu sur X , alors (f_n) cvu vers 0 dans X .

Def°15: On appelle restes d'ordre n d'une série simplement cv $\sum f_n$ la suite de fonct° $R_n: X \rightarrow E$ définie par $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$.

Proposil°16: Soit $\sum f_n$ une série simplement convergente. Pour que $\sum f_n$ converge uniformément sur X , il faut et il suffit que la suite (R_n) cvu vers 0 sur X .

Exemple 12: la série de fonct° $\sum x e^{-nx}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Def°18: On dit que $\sum f_n$ converge absolument sur X si $\forall x \in X$, $\sum \|f_n(x)\|$ converge. **Notat°:** $\sum f_n$ CVA.

Propositi^o 19: Si $\sum f_n$ CVA, alors $\sum f_n$ CVS.

Def^o 20: On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur X si

① $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{B}(X, E)$. ② $\sum \|f_n\|_0$ converge.

Propositi^o 21: On suppose E complet. On a alors.

$$CVN \Rightarrow CVM$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$CVA \Rightarrow CVS.$$

Contre-exemple 22: La série de fonct^o de terme général $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n}$ converge unif. mais pas normalement.

II. Régularité des suites et séries de fct^o.

A) Continuité - X est maintenant une partie d'un evn $(E, \|\cdot\|)$.
Soit $(f_n: X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ et $f: X \rightarrow E$. Soit $a \in X$.

Th 23: Si (f_n) CVM vers f sur X et si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en a , alors, f est continue en a .

Contre-exemple 24: La limite simple de $(f_n: x \mapsto x^n)_{n \geq 1}$ est discontinue.

Corollaire 24: Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur X CVM sur X , alors la limite de (f_n) est continue.

Th 25: (double-limite). Supposons que (f_n) CVM vers f sur X . Soit $a \in X$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe.

Alors (b_n) a une limite b et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ i.e.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow x} f_n(x) = \lim_{a \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Contre-exemple 26: En reprenant le contre-exemple 24, on a.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x).$$

B) Dérivations. [ELA], [HAU].

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $(f_n: I \rightarrow E)$ une suite de fonctions et Soit $f: I \rightarrow E$.

Th 27: On suppose que:

① $f_n \rightarrow f$ simplement

② (f'_n) CVM sur I .

Alors, f est dérivable sur I et $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \forall x \in I$.

Contre-exemple 27: La suite de fonct^o $f_n: x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ CVM vers $f: x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas dérivable.

Th 28: (dériv^o terme à terme). On suppose que:

① $\sum f_n$ CVS.

③ $\sum f'_n$ est unif. convergent.

Alors la fonct^o $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dérivable sur I et on a:

$$\forall x \in I, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x).$$

Exemple 30: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}$ avec $f^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(n)^k}{n^x}$.

C) Intégration. [ELA], [FAR].

Th 31: Soit $(f_n) \subset L^1([a, b], E)$. On suppose que (f_n) CVM vers f sur $[a, b]$. Alors, f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt$.

Th 32: (CV monotone). Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. Alors f est mesurable et $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Alors $\int_X f du = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n du$.

[ELA]
p. 250

[HAU]
p. 242

[ELA]

[FAR]
p. 3.

[AR]

Corollaire 33: Soit (f_n) une suite de fct° mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. Alors $\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu$.

[AR]

th 34: Soit (f_n) une suite de fct° mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. la fct° F définie par $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est mesurable et $\int F d\mu = \int (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x) d\mu(x)$.

[AR]

th 35: (Convergence dominée). Soit (f_n) une suite de fct° intégrables réelles.

- ① Pour presque tout $x \in X$, $(f_n(x))$ admet une limite $f(x)$.
 ② Il existe une fonction positive intégrable g tq $\forall n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
 Alors la fct° f est intégrable et $\int_X f_n(x) d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$.

[AR]

th 36: (Intégral° terme à terme). Soit (f_n) une suite de fct° intégrables. Alors $\int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu$ et $\sum f_n$ cv p.p et on a $\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$.

III. Cas particuliers.

A) Séries entières. [FLA]; [EGN/Bernis].

[LA]

Def° 37: On appelle série entière toute série de fct° $\sum f_n$ où $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $z \mapsto a_n z^n$ avec $(a_n) \subset \mathbb{C}$.

Def° 38: On appelle rayon de cv le rayon du plus grand disque centré sur lequel cette série cva.

th 39: Une série entière cvn sur tout compact contenu dans le disque de cv.

th 40: (Nombres de Bell et formule de Dobinski). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note B_n le nombre de relat° d'équivalence sur un ens. à n éléments. Pour convenir $B_0 = 1$. On a:

- ① $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$.
 ② La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n$ a un rayon de cv $R > 0$ et sa somme S vérifie $\forall t \in]-R, R[$, $S'(t) = e^t S(t)$.
 ③ Formule de Dobinski $B_n = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!}$. **DEV 1**.

B) Séries de Fourier. On suppose connu les déf° générales de la th.

th 41: (Dirichlet). Soit f une fonction 2π -périodique continue et $\neq 0$ p.m. Alors, la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

th 42: (Formule de Poisson) $\forall f \in S(\mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}$
 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2i\pi n t}$.

th 43: (Échantillonnage de Shannon). Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Supposons que f est nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \text{sinc}(\pi(n-t))$. **DEV 2**.

Rq. Avoir en tête le petit résultat sur les fct° f dont $\hat{f}$ est à supp. compact.
 ① Pas la place mais on peut parler des séries génératrices.
 ② Savoir interpréter Shannon en terme d'isométrie.