

I. Séries entières.

A) Rayon de CV d'une série entière [Gou], [ELA]

Def° 1: On appelle série entière toute série de fonction de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ où z est une variable complexe et $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$. On définit alors par là à ce a un sens la somme $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de cette série.

Lemme 2: (Abel). Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors,

- $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ CVA.
- $\forall 0 < r < R$, la série de fonct° $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ CVN dans $D(0, r)$.

Def° 3: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. Le nombre $R = \sup \{ r > 0 / (|a_n| r^n)_{n \geq 0} \text{ est bornée} \}$ est appelé rayon de CV de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Proposil° 4: $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ CVA.

- $\forall |z| > R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge.
- $\forall 0 \leq r < R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ CVN sur $D(0, r)$.

On appelle $D(0, R)$ le disque de CV de la série entière. **Rq:** ① $R \in [0, +\infty]$ ② le comportement de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sur $\mathbb{S}(0, R)$ est indéterminé.

Exemple 6: La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon $R = +\infty$ et diverge sur $\mathbb{S}(0, 1)$ mais que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge sur $\mathbb{S}(0, 1)$.

B) Calcul pratique de rayon de convergence. [ELA]

Proposil° 7: (Règle de d'Alembert). Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de CV R .

Si la suite de terme général $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ CV vers $L \in [0, +\infty]$, alors $R = \frac{1}{L}$.

Exemple 8: La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon $R = +\infty$.

Th 9: (Hadamard). Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. Alors $R = \frac{1}{L}$ où $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$.

Exemple 10: Si $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$, alors $R = \frac{1}{2}$.

Corollaire 11: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. Si $|a_n|^{1/n} \rightarrow L \in [0, +\infty]$, alors $R = \frac{1}{L}$. (Règle de Cauchy).

Exemple 12: Pour $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$, on a $R = 2$.

Proposil° 13: (Comparaison des rayons de CV). Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon R_a et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de rayon R_b . Alors,

- Si $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.
- Si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a > R_b$.
- Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Exemple 14: Pour toute fonct° rationnelle f non nulle, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n$ a un rayon égal à 1.

C) Opérations sur les séries entières. [ELA] p. 239

Def° 15: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 2 séries entières. On pose alors

- la série somme: $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$
- la série produit: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$
- la série produit par $\lambda \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) z^n$ ou $\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Th 16: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de rayons R_a et R_b . Alors

- $R_a + R_b \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$. De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$.

② En multipliant $\sum a_n z^n$ par $\lambda \neq 0$, on ne change pas le rayon de convergence. De plus, si $|z| < R_a$, on a :

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) z^n.$$

③ Le rayon de CV R_c de la série produit vérifie $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.
De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

II. Propriétés de la somme.

A) Continuité de la fonction somme. [ELA]

Th 17: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de CV R . Alors la fonction somme S est continue sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$.

Corollaire 17: $\forall p \geq 0$, la foncl^o somme admet un dev. limité à l'ordre p au voisinage de 0 dont la partie régulière est donnée par $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^i$.

Exemple 19: la foncl^o $S: \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{C}$.

B) Dérivabilité de la fonction somme. [ELA]

Def 20: On appelle série entière dérivée d'une série entière $\sum a_n z^n$, la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$.

Propositi^o 21: Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de CV.

Th 22: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable réelle et de rayon de CV R . Alors la fonction somme $S:]-R, R[\rightarrow \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée S' est la foncl^o somme de la série entière dérivée.

Corollaire 23: Sous les hypothèses du th. ci-dessus, S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in] -R, R[$, $S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$.
En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Exemple 24: $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Appl^o 25: (Nombres de Bell). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note B_n le nombre de relat^o d'équivalence sur $[1, n]$. Par conv^o $B_0 = 1$. On a :

$$\textcircled{1} B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

$\textcircled{2}$ La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n$ a un rayon de CV > 0 et sa somme S vérifie $\forall t \in]-R, R[$, $S'(t) = e^t S(t)$.

$\textcircled{3}$ Formule de Dobinski: $B_n = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{p!}$.

C) Intégration de la fonction somme. [ELA]

Th 26: Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de CV R . Si $[a, b] \subset]-R, R[$, alors,

$$\int_a^b S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b t^n dt.$$

Corollaire 27: Avec les notat^o précédentes, S est continue sur $] -R, R[$ et les primitives sont de la forme $x \mapsto x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

III. Développement en série entière ...

A) ... d'une variable d'une variable complexe. [EAU]

Def 28: Soit f une fonction définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière au point z_0 si il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de CV > 0 et un

[BER]
+
[GNG]

voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in V$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

th 29: Soit f définie sur un voisinage de 0 et DSE à l'origine.
 ① Il existe un voisinage de 0 sur lequel f est infiniment dérivable.
 ② Le DSE de f à l'origine est son développement de Taylor.

Corollaire 30: ① Si il existe, le DSE à l'origine d'une fct est unique.
 ② Si f est DSE en c , alors les dérivées de f aussi et leurs DSE sont les séries entières dérivées successives du DSE de f .
 ③ Si f et g sont DSE en 0 et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda f + g$ est DSE en 0.

Exemple 31: $\forall z \in D(0,1)$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

B) D'une fonction d'une variable réelle. [EJA].
 Soit $X \subset \mathbb{R}$.

Def 32: on dit qu'une fonction $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ est DSE en 0 si il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de cv $R > 0$ et $\forall x \in]-R, R[$ avec $J =]-R, R[\subset X$ tel que $\forall x \in J, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Proposil 33: Soit f DSE en x_0 . Alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est $\mathcal{C}^\infty$ et le DSE de f en x_0 est $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$: c'est la série de Taylor de f en x_0 .

Contre-exemple 34: la fct $x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas DSE en 0.

Proposil 35: Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I =]-a, a[$ ($a > 0$).
 Si il existe $R > 0$ et $M > 0$ tels que $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq \frac{M n!}{R^n}$,
 alors f est DSE en 0 sur $J =]-R, R[$ où $R = \min(a, R)$.

IV. Fonctions génératrices. [APP]

Soit $\Omega, \mathcal{A}, P$ un espace probabilisé.

Def 36: Soit X une v.a.d prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $p_n = P(X=n), \forall n \in \mathbb{N}$. La fct génératrice de X est la somme de la série entière $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$.

Proposil 37: La série $\sum p_n t^n$ est de rayon au moins 1 et pour tout t tq $\sum p_n t^n$ converge absolument, $G(t) = E(t^X)$.

Proposil 38: Soit X une v.a.d à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fct génératrice G . Alors:

① G est définie sur $[-1, 1]$ au moins, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$, il au moins.

② $G(1) = 1, 0 \leq G(t) \leq 1 \forall t \in [-1, 1]$.

③ G est absolument monotone sur $[0, 1]$: toutes ses dérivées successives sont positives. En particulier, G est croissante et convexe.

th 39: (Récupération de la loi) $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$.

Ainsi, la fct génératrice caractérise la loi.

th 40: (Récupération des moments). $X \in L^k \iff G$ est k fois dérivable à gauche en 1 et dans ce cas,
 $G^{(k)}(1) = E(X(X-1)\dots(X-k+1))$.

th 41: (Identité de Wald). Soit N une v.a.d, (X_n) une suite de v.a.d i.i.d et indep. de N . Notons $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ et $S = \sum_{j=1}^N X_j$. Notons G_N la fct génératrice de N . Alors $G_S = G_N \circ G_X$.

th 42 (Processus de Galton Watson)

Mettre la dev qui l'énoncé sera prêt.