

I. Séries de Fourier.

A) Cadre d'étude [ELAT] p. 172

On définit le tore $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on identifie les fonctions sur T à valeurs dans $\mathbb{C}$ avec les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodiques.

On notera $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues 2π -périodiques de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que l'on munit de $\|\cdot\|_{\infty}$. On rappelle que $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_{\infty})$ est un espace de Banach.

On notera par $p \in [1, +\infty[$, $L^p(T)$ l'espace des fonctions p -intégrables sur T munit de la norme $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$.

Proposil° 1: $\mathcal{C}_{2\pi} \subset L^p(T) \subset L^1(T) \quad \forall p \geq 1$.

Proposil° 2: Pour $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{C}_{2\pi}$ est dense dans $(L^p(T), \|\cdot\|_p)$.

B) Coefficients de Fourier d'une fonction intégrable.

Def° 3: Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $e_n: x \mapsto e^{inx}$ [ELAT]

Rq: $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e_n \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

Def° 4: On appelle polynôme trigonométrique tout élément de l'espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Proposil°: (Weierstrass trigo).

Def° 5: On appelle coefficients de Fourier d'une fonction

$f \in L^1(T)$ le nombre complexe $c_n(f)$ donné par
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Proposil° 7: (Riemann - Lebesgue). Pour $f \in L^1(T)$, $c_n(f) \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$.

Proposil° 8: Pour $f, g \in L^1(T)$, $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$.

Def° 9: Soit $f \in L^1(T)$. On définit la série de Fourier de f comme la série dont les sommes partielles sont:
$$(S_n f = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ik \cdot})_{n \geq 1}.$$

II. Convergence L^1 et L^2 des séries de Fourier.

A) Séries de Fourier dans $L^1(T)$ [ELAT]

Def° 9: Soit $f \in L^1(T)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Posons par $x \in [-\pi, \pi]$, $\Phi_{\lambda} f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \lambda^{|n|}$. [ELAT] p. 184

Def° 10: (Noyau de Poisson). On pose par $\lambda \in [0, 1]$, $P_{\lambda}: x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} \lambda^{|n|} = \frac{1 - \lambda^2}{1 - 2\lambda \cos(x) + \lambda^2}$. $x \in [-\pi, \pi]$. [ELAT] p. 176

Proposil° 11: Pour $f \in L^1(T)$, on a $\Phi_{\lambda} = f * P_{\lambda}$.

Proposil° 12: $(P_{\lambda})_{\lambda \rightarrow 1^-}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(T)$. [ELAT] p. 184

Corollaire 13: Soit $f \in L^1(T)$ tel que $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Alors la série de Fourier de f converge dans $\mathcal{C}(T)$ vers une fonction continue 2π -périodique $\tilde{f}$ telle que $f = \tilde{f}$ p.p. [ELAT]

Rq: En particulier, lorsque f sera continu, alors on aura $\tilde{f} = f$ partout.

Corollaire 14: Soit $f \in L^1(T)$, alors si $c_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, $f = 0$.

Proposition 15: (Principe de localisation). Soit $f, g \in L^1(T)$ tels que $f = g$ au voisinage d'un point x_0 . Alors $S_n f - S_n g$ tend uniformément vers 0 au voisinage de x_0 .

B) Série de Fourier d'une fonction de carré intégrable (ELA)

Propos. 16: L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(T) \times L^2(T) \rightarrow \mathbb{C}$ est un produit scalaire sur $L^2(T)$. $(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \bar{g}$

Propos. 17: $(L^2(T), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert dont la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ en est une base hilbertienne.

Rq: Pour $f \in L^2(T)$, $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$.

Th 18: (Formule de Parseval). Soit $f \in L^2(T)$. Alors:

① $(\sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n)_{N \geq 1}$ converge vers f dans $L^2(T)$. i.e. $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n$

② $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$ (Formule de Parseval).

III. Convergence ponctuelle des séries de Fourier.

A) Divergence des séries de Fourier.

On commence par s'intéresser à la mauvaise convergence des séries de Fourier des fonctions de $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_{\infty})$.

Proposition 19: Posons $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} g_k(x)$

où $g_k(x) = 2 \sin(n_k x)$ avec $n_k = 2^{k^3}$. Plus

f est continue, 2π -périodique Mais la série de Fourier de f diverge en 0.

Corollaire 20: L'ensemble des fonc^o $f \in C_{2\pi}$ dont la série de Fourier de f diverge en 0 est dense dans $C_{2\pi}$.

On peut raffiner ce résultat ce résultat comme suit:

Th 21: (Baier). Dans un espace vectoriel normé complet, la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide.

Corollaire 22: (Banach - Steinhaus). Soit E un espace vectoriel normé complet et F un evn. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'opérateurs. Alors, l'un des 2 cas suivant se produit:

(i) $\exists M > 0$ tel que $\forall i \in I, \|T_i\| \leq M$.

(ii) il existe ϕ en G_s dense de E tel que $\sum_{i \in I} \|T_i \phi\| = +\infty$.

(Noyau de Dirichlet). La fonction $D_N = \sum_{n=-N}^N e^{inx}$ est appelé noyau de Dirichlet d'ordre N .

Rq: On montre que $D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\sin((2N+1)x/2)}{\sin(x/2)} & \text{si } x \neq 0 \text{ mod } 2\pi \\ 2N+1 & \text{si } x = 0 \text{ mod } 2\pi \end{cases}$

Propos. 23: D_N est paire, 2π -périodique, vérifie $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$, est continue.

Propos. 24: $\forall f \in L^1(T), S_N f = D_N * f$.

Th 25: Soit $n_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe D en G_s dense de $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_{\infty})$ tel que $\forall f \in D, \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_{n_0} f| = +\infty$.

Rq: En particulier, D n'est pas dénombrable.

Corollaire 26: Il existe Δ en G_s dense de $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_{\infty})$ tel que $\forall f \in \Delta$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} / \sup_{k \in \mathbb{N}} |S_{n_k} f| = +\infty\}$ est un G_s dense de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

B) Critères de convergence ponctuelle. [SCHIV]

Th 27: (Test de Dini). Soit $f \in L^1(T)$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f a une limite à gauche et à droite en t_0 et que par un coteur $\delta > 0$ on a:

$$\int_{-s}^s \left| \frac{f(t_0+t) - f(t_0)}{t} \right| dt < +\infty \text{ et } \int_0^s \left| \frac{f(t_0+t) - f(t_0)}{t} \right| dt < +\infty$$

Alors, $S_n f(t_0) \rightarrow \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}$.

Corollaire 28: Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Si il existe $\delta > 0$ tq $\int_{-s}^s \left| \frac{f(t_0+t) - f(t_0)}{t} \right| dt < +\infty$, alors $S_n f(t_0) \rightarrow f(t_0)$ et $t_0 \in \mathbb{R}$.

Th 29: Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On suppose que:

- ① f admet une limite à gauche et à droite en t_0 .
- ② f admet une dérivée à gauche et à droite en t_0 .

Alors, $S_n f(t_0) \rightarrow \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}$.

Rajata Dirichlet

Th 30: Pour $1 \leq p < +\infty$ et tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^p$,

(S_n) converge unif. vers f . En fait, $\|S_n - f\|_\infty = O(n^{-p+1})$.

Ap: Cela montre que la vitesse de convergence d'une série de Fourier augmente si la fonction f est plus lisse. Les propriétés locales de f se retrouvent dans les propriétés globales de $(S_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$.

C) Convergence des moyennes arithmétiques

Def 31: (Noyau de Fejér). La fonction $K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$ est appelé noyau de Fejér d'ordre N .

Proposition 32: $K_N = \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e_n$ et K_N est une approx. de l'unité.

Def 33: On pose $\sigma_n f = K_n * f$ pour $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Th 34: (Fejér).

- ① Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors $\|\sigma_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|\sigma_n f - f\|_\infty \rightarrow 0$.

② Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p \in [2, +\infty]$, alors, $\|\sigma_n f\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|\sigma_n f - f\|_p \rightarrow 0$.

IV. Application de la théorie des séries de Fourier...

A) ... Au calcul de somme de séries.

Exemple 35: On peut calculer $\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ en considérant $f: x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ $x \in [-\pi, \pi]$ et en appliquant l'identité de Parseval. on trouve aussi $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

B) ... À la théorie du signal.

Th 36: (Formule sommatoire de Poisson).

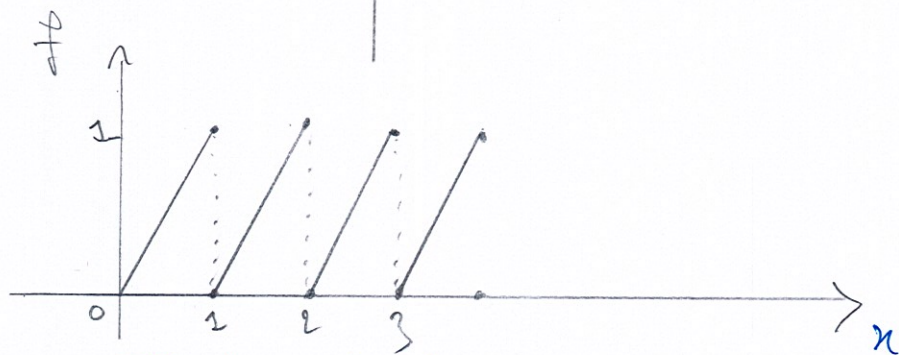
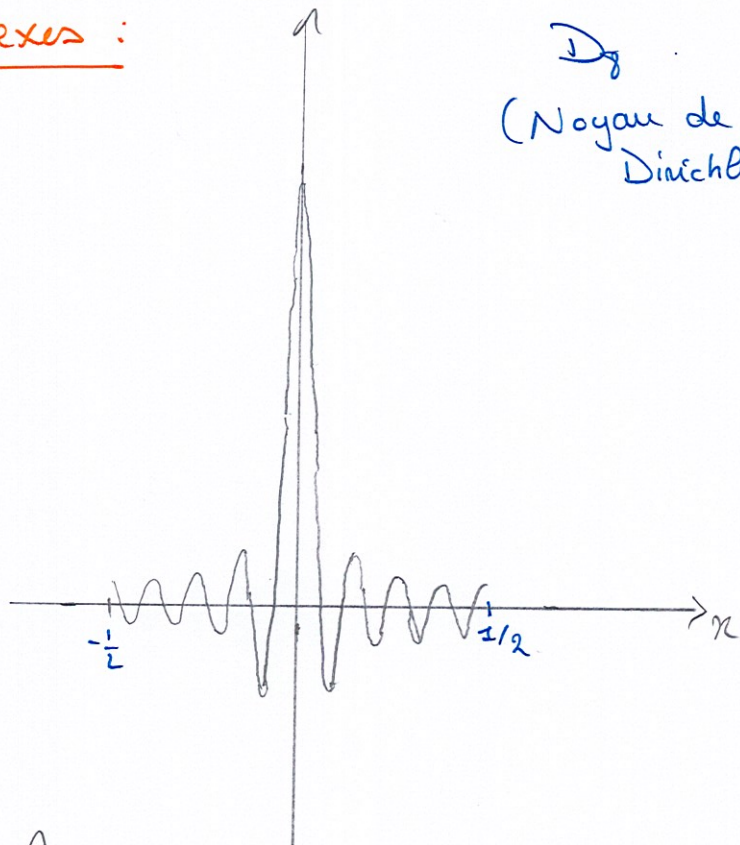
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2ik\pi t}$.

Th 37: (Shannon [1949]) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si $\text{Supp}(\hat{f}) \subset [-F, F]$ avec $2F \leq 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \frac{\sin((n-x)\pi)}{(n-x)\pi}$. DEV2

Th 38: Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, non identiquement nulle et dont la transformée de Fourier $\hat{f}$ est nulle en dehors de $[-F, F]$. Alors il n'existe pas d'intervalle $[a, b]$ ($a < b$) sur lequel f est identiquement nulle.

Annexes :

D_g
(Noyau de Dirichlet).



$$\sum_n f(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

F_{K_g}
noyau de Fejér.

