

I. Convolution et approximation de l'unité

A) Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$. [SCH IV]

Th 1: Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors,

- ① La fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est mesurable.
- ② Par presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$.
- ③ La fonction définie presque partout par $x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

Def 2: Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle convolution de f et g la nouvelle fonction définie presque partout dans $\mathbb{R}$ par $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$.

Proposition 3: Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors,

- ① $f * g = g * f$
- ② $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Rq: $*$ ne possède pas d'élément neutre ce qui explique la notion suivante.

B) Approximation de l'unité. [SCH IV] p. 133.

Def 4: Soit $(\varphi_k)_{k \geq 1} \subset L^1(\mathbb{R})$. On dit que cette suite est une approximation de l'unité si:

- ① $\sup_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_k(x)| dx \leq C < +\infty$.
- ② $\forall k \geq 1, \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x) dx = 1$.
- ③ Par tout voisinage de 0 V , $\int_{V^c} \varphi_k(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Si de plus $\forall k \in \mathbb{N}^*, \varphi_k$ est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact on dit que (φ_k) est une suite régularisante.

Exemple 5: Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int \varphi(x) = 1$. Par $k \geq 1$, on pose $\varphi_k(x) = k \varphi(kx)$. La suite (φ_k) est une approximation de l'unité. On peut retenir les cas particuliers suivants:

$$* \varphi(x) = C e^{-\frac{|x|^2}{2}} \quad * \varphi(x) = \begin{cases} C e^{-\frac{1}{1-|x|}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Th 6: Soit $(\varphi_k)_{k \geq 1}$ une approximation de l'unité. Alors, $\forall p \in [1, +\infty[$, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$, on a: $\|\varphi_k * f - f\|_p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Corollaire 7: L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ formé des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans $\mathbb{R}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}) \forall p \in [1, +\infty[$.

II. Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz. [SCH IV] p. 137, [DYT] p. 30.

A) Espace de Schwartz et transformé de Fourier.

Def 7: On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est à décroissance rapide si $\forall n, p \in \mathbb{N}, N_{n,p} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^p |f^{(n)}(x)| < +\infty$.

Notation: On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions à décroissance rapide.

Exemple 8: $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Def 10: Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f , notée $\hat{f}$ par:

$$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \xi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i \xi t} dt$$

Proposition 11: Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On peut alors définir la transformée de Fourier inverse.

[DYT] p. 30

Def 12: Pour $f \in S(\mathbb{R})$, on peut alors définir la transformée de Fourier inverse: $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi$.

Proposition 13: Pour $f \in S(\mathbb{R})$, on a $\widehat{\hat{f}} = f$.

Corollaire 14: L'opérateur de transformation de Fourier $F: f \mapsto \hat{f}$ est une bijection de $S(\mathbb{R})$ sur lui-même.

Proposition 15: $\forall f, g \in S(\mathbb{R}), \widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

Proposition 16: (identité de Plancherel). Pour $f \in S(\mathbb{R})$, $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

B) Application à la théorie du Signal. [BER], [CHART].

Th 17 (Formule sommatoire de Poisson).

Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Alors, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{2ik\pi t}$.

Th 18: (Shannon [1949]). Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Si $\text{supp}(\hat{f}) \subset [-F, F]$ avec $2F \leq 1$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{\sin((n-x)\pi)}{(n-x)\pi}$. DEV 1.

Th 19: Soit $f \in S(\mathbb{R})$, non identiquement nulle et dont la transformée de Fourier $\hat{f}$ est nulle en dehors de $[-F, F]$. Alors, il n'existe pas d'intervalle $[a, b]$ ($a < b$) pour lequel f est identiquement nulle.

III. Extension de la transformée de Fourier.

A) Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$. [DYTT], [FAR].

Th 20: Pour toute fonction intégrable f sur $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier $\hat{f}: \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi t \xi} dt$ est bien définie, continue, et tend vers 0 lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$. $L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$.

Th 21: $\hat{f}: f \mapsto \hat{f}$ est une injection et, $\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

Proposition 22: $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}), \widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

Exemples 23: ① $1_{[-1,1]} \xrightarrow{F} \xi \mapsto \frac{\sin(\xi)}{\xi}$.

② $x \mapsto e^{-\alpha|x|} \xrightarrow{F} \xi \mapsto \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2} \quad \alpha > 0$.

③ $x \mapsto e^{-\alpha x^2} \xrightarrow{F} \xi \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$.

Th 24: (Formule d'inversion). Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, on a bien $\hat{\hat{f}} = f$ par presque tout x dans $\mathbb{R}$.

Z. F n'est pas surjective.

Contre exemple 25: $1_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R})$ mais $\xi \mapsto \frac{\sin(\xi)}{\xi}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Th 26 (Formule sommatoire de Poisson dans le cadre L^1) [SCHIV] p 206

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+t)$ est une fonction

- ① la fonction $F: t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+t)$ est bien définie presque partout sur $[0,1]$, intégrable sur $[0,1]$.
- ② la série de Fourier de F est donnée par $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n t}$.

③ Si en outre on suppose que $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(m)| < +\infty$, alors par presque tout $t \in \mathbb{R} [0,1]$, on a l'égalité
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n) \stackrel{(*)}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n t}.$$

Dans le cas où f est continue, $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(t+m)$ converge uniformément sur $[0,1]$ et $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(m)| < +\infty$, alors $(*)$ est vraie partout et en particulier, on a,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

B) Extension de la transformée à $L^2(\mathbb{R})$.

Th 22: (Plancherel). Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. En particulier $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. DEV 2.

Th 28: $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Propos 29: (Shannon dans le cas de L^2)

Posons $BL^2 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) / \text{supp}(\hat{f}) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$. Alors

① BL^2 est un espace de Hilbert.

② $BL^2 \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$

IV. Applications aux probabilités.

A) Fonction caractéristique - [Cuv] p.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \rho)$ un espace probabilisé.

Def° 30: Soit μ une mesure bornée sur $\mathbb{R}$. On appelle transformée de Fourier de μ l'application $\tilde{\mu}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x).$$

Def° 31: On appelle fonction caractéristique de la variable aléatoire $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la transformée de Fourier de sa loi P_X .

Notat°: φ_X .

$$P_X: \forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X(t) = E(e^{itX}).$$

Propos 32: ① $\varphi_X(0) = 1$ ② $|\varphi_X(t)| \leq 1 \forall t \in \mathbb{R}$.

③ $\varphi_{X+b}(t) = \varphi_X(t) e^{ibt}$ ④ φ_X est unif. continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 33 Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Th 34: La fonction caractéristique caractérise la loi.

Exemple 34: Si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, alors $\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$.
en o, alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2n$ et ils sont donnés par

App 36: Si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, alors X admet des moments à tout ordre et $\forall k, E(X^k) = (-1)^k i^k \varphi_X^{(k)}(0)$.

B) Théorème central limite.

Th 37: (Lévy). $X_n \rightarrow X$ en loi si et seulement si, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_X(t).$$

Th 37: (central limite). Soit (X_n) une suite de var. i.i.d.

$$\text{Alors } \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^n X_k - nE(X_1) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \text{Var}(X_1)).$$