

Soit $K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$.I. Ensembles et fonctions convexes.A) Ensembles convexes. [G00]Def°1: Soit[G00 p.51]
On appelle segment d'extrémités a et b et on note $[a, b]$ l'ensemble $\{ \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in [0, 1] \}$.Proposil°2: $\forall a, b \in E, [a, b]$ est fermé.Def°3: Soit $C \subset E$. On dit que C est convexe si $\forall a, b \in C, [a, b] \subset C$.Proposil°4: ① Tout sous-espace vectoriel F de E est convexe.
② Une partie convexe est convexe.: Soit $A \subset E$. Il existe une plus petite partie de E contenant A .Def°6: Soit $A \subset E$. On appelle enveloppe convexe de A la plus petite partie de E contenant A .Notat°: $\text{Conv}(A)$.Proposil°7: Soit $A \subset E$. Alors $\text{Conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres des points de A à coefficients positifs.Proposil°8: Soit C un convexe de E . Alors C et $\bar{C}$ sont convexes.Proposil°9: Si $K = \mathbb{R}$ et C est convexe compacte, alors $\text{Conv}(A)$ est compacte.B) Fonctions convexes. [RO7 AR]Soit $I \subset \mathbb{R}$ un (intervalle) non trivial. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.Def°10: On dit que f est convexe si $\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1]$
 $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. On dira que f est concave si $-f$ est convexe.Def°11: On appelle épigraphe de f l'ensemble $\mathcal{E}(f) = \{ (x, y) \in I \times \mathbb{R} / y \geq f(x) \}$.Proposil°12: Une applicat° $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si son épigraphe est convexe dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.Proposil°13: Une applicat° $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, pour tout couple (A, B) ($A = (a, f(a))$; $B = (b, f(b))$) de points distincts du graphe, la courbe représentative de f sur $[a, b]$ est au-dessous de $[AB]$.Exemple 14: ① exp: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est convexe.
② $x \mapsto |x|$ est convexe et plus généralement $x \mapsto |x|^n$.Proposil°15: Soit $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et strictement croissante et $g: I \rightarrow J$ convexe. Alors $f = \varphi \circ g$ est convexe.Rq: Si φ n'est pas strictement croissante, le résultat ne subsiste pas.Th16: (Inégalité des 3 pentes). Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.
Notons pour $x \neq y \in I$, $p(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ la pente la droite $((x, f(x)), (y, f(y)))$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- ① f est convexe.
- ② $\forall x < y < z$ dans I , $p(x, y) \leq p(x, z) \leq p(y, z)$.
- ③ $\forall a \in I$ la fonction $\zeta_a: x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Th17: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une f° convexe sur I . Alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point de I et $\forall a < b$ dans I , on a: $f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b)$.Th18: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.
① f est convexe sur I ② f' est croissante sur I .
③ $\mathcal{E}_f$ est situé au-dessus de ses tangentes.

th19: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est 2 fois dérivable sur I , alors f est convexe si, et seulement si, $f'' \geq 0$.

Exemple 20: $\sin$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ est convexe.

Exemple 21: Fonction Γ d'Euler. Γ est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\Gamma \circ \Gamma$ est convexe et telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$. DEV 1

Soit maintenant $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. La notion de convexité peut en outre être définie.

th22: f est convexe si, et seulement si, $\forall x, y \in U$, la fonction $\varphi_{xy}: t \mapsto f(x + t(y-x))$ est convexe sur $[0, 1]$.

th23: Supposons f de classe C^1 sur U . Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- ① f est convexe sur U .
- ② $\forall x, y \in U$, $f(x) \geq f(y) + Df(y)(x-y)$.
- ③ $\forall x, y \in U$, $(Df(x) - Df(y))(x-y) \geq 0$.

th24: Si f est convexe différentiable en $a \in U$, et si $\nabla f(a) = 0$, alors f admet en a un minimum global.

II - Problèmes de minimisation.

A) Projection dans un espace de Hilbert [Hin].
Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.

th25: (Project° sur un convexe fermé). Soit C une partie convexe fermée, non vide de H . Alors, $\forall x \in E$, il existe un unique point $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. Ce point est appelé project° de x sur C et noté $P_C(x)$ est caractérisé par:

$y \in C$ et $\forall z \in C$, $\operatorname{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0$.

Rq: Dans le cas où $C = F$ est un sous-espace vectoriel de H de dim finie, alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in F$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

th26: (Représentat° de Riesz). L'appli° $E \rightarrow E'$, $y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$ est une isométrie bijective. DEV 2

Rq: Si H est seulement un Banach, alors la distance à un convexe fermé n'est pas forcément atteinte et si H est seulement préhilbertien, alors le résultat ne subsiste que si F est un sev de dimension finie.

Contre-exemple 27: Si $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_\infty$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ est un fermé par lequel la distance n'est pas atteinte.

Corollaire 28: L'appli° $x \mapsto P_C(x)$ est 1-lipschitzienne.

Corollaire 29: Si F est un sous-espace fermé de E , alors P_F est un opérateur de E sur F .

Corollaire 30: ① Pour tout sous-espace fermé F de E , $F \oplus F^\perp = E$.

② Pour tout sous-espace F de E , $F^\perp = \{0\}$ si et seulement si $F = \{0\}$.

Propo sil° 31: $\forall T \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E$, $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$.

B) Méthode des moindres carrés [Amo].
Soit $Ax = b$ un système d'équations linéaires. $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$ et $b \in \mathbb{C}^m$. La méthode des moindres carrés consiste à minimiser la fonction $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$.

th32: (moindres carrés).

Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{C}^m$.
Rq: Se justifie par le fait que $x \mapsto \|Ax - b\|_2^2$ est convexe.

① Le problème des moindres carrés $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$ possède au moins une solution.

② Les solutions sont caractérisées par $A^*Ax = A^*b$.

③ Si x et x' sont 2 solut^o, alors $Ax = Ax'$. La solut^o est donc unique si la matrice A est de rang n .

Rq: Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable on sait que $\nabla f(x) = 0$ lorsque x réalise le minimum de f sur $\mathbb{R}^n$. Prenons par ex $f: x \mapsto \|Ax - b\|_2^2$. Son gradient est $\nabla f(x) = 2A^*(Ax - b)$. L'équation $\nabla f(x) = 0$ est précisément l'équation normale.

Exemple 33: Soit $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ On cherche alors $\inf_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta - y_i)^2$. $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

III. Appliqué.

A) Inégalités de convexité. [ROTARD], [APP]

Proposil^o 34: $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - x \leq e^{-x}$

App^o 35: (Lemme de Borel-Cantelli). Soit (A_n) une famille d'événements indépendants. Si $\sum_{n=1}^{\infty} p(A_n) < \infty$ alors $p(A_n \text{ i.s.}) = 0$.

Proposil^o 36: (Inégalité de Jensen). Soit $M \subset \mathbb{R}$ une partie convexe et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. f est convexe si et seulement si par toute combinaison linéaire convexe $\sum d_i x_i$, $f(\sum d_i x_i) \leq \sum d_i f(x_i)$.

Proposil^o 32: $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Proposil^o 39: (Hölder) Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{R}, n}$, $(y_i)_{i \in \mathbb{R}, n}$. $\forall p, q$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a: $|\sum x_i y_i| \leq (\sum |x_i|^p)^{1/p} (\sum |y_i|^q)^{1/q}$.

Proposil^o 40: (Inégalité arithmético-géométrique).

$\forall x_1, \dots, x_n$, on a: $(\frac{1}{n} \sum x_i)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum x_i$.