

Sat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Les variables aléatoires considérées seront fns à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

1. Loi d'une variable aléatoire.

A) Définitions [OUV2], [OUV4], [APP]

Sat $X: \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire.

Def 1: On appelle loi de la variable aléatoire X la mesure image P_X de P par X .

Exemple 2: Si T représente le premier pile obtenue lors d'un lancer de N fois une pièce de monnaie, $P(T=j) = \frac{1}{2^j}$.

Proposit° 3: La loi P_X est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

B) Variables aléatoires à densités. [OUV4] p. 180

Def 4: Sat $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une v.a.n. Si il existe une fonction $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, Riemann intégrable telle que :

$$\textcircled{1} \int_{\mathbb{R}} f_X(t) dt = 1 \quad \textcircled{2} \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X(A) = \int_A f_X(t) dt$$

Alors, on dit que X est une variable aléatoire à densité et f_X est appelée densité de la variable aléatoire X .

Exemple 5: La loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est à densité $f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ où $m = E(X)$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X)$.

Figure 1: Tableau des lois usuelles à densités. Δ coquille dans le livre.

Rq: Si X est une v.a.n à densité, alors $\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = 0$.

C) Variables aléatoires discrètes [ROTT] p. 73, [OUV4] p. 20

Def 6: On dit qu'une variable aléatoire $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est discrète si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

Proposit° 7: Sat $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète. Alors la famille $(p(X=k))_{k \in X(\Omega)}$ caractérise la loi de X .

Exemple 8: On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X=0) = 1-p$, $P(X=1) = p$. Notation: $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Figure 2: Tableau des lois usuelles discrètes.

D) Lois conjointes, lois marginales. [APP] [OUV2] p. 11, p. 486 [G-K] p. 130

Def 1: Une variable aléatoire $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est appelé vecteur aléatoire.

Proposit° 10: Il est équivalent de se donner un vecteur aléatoire ou bien un n -uplet $(X_1, \dots, X_n)$ de v.a.n.

Def 11: Sat $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire. Les lois des variables $X_1, \dots, X_n$ sont appelées lois marginales. La loi du vecteur X est appelée loi conjointe.

Proposit° 12: Sat $X = (X_1, X_2)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$.

1 Si X admet une densité f_X , alors X_1 et X_2 admettent des densités données par :

$$\textcircled{1} f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f_X(x_1, x_2) dx_2 \quad \textcircled{2} f_{X_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_X(x_1, x_2) dx_1$$

2 Si X est une variable aléatoire discrète, X_1 et X_2 le sont aussi et $P(X_1=x_1) = \sum_{x_2} P(X_1=x_1, X_2=x_2)$.

et $P(X_2=x_2) = \sum_{x_1} P(X_1=x_1, X_2=x_2)$.

Exemple 13: Sat $X = (X_1, X_2): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ de densité f_X définie par $f_X(x_1, x_2) = p^2 \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x_1) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x_2) e^{-p(x_1+x_2)}$.

Alors, $Y = 2X_1 - X_2$ admet pour densité :

$$f_Y(y) = \frac{p}{3} (\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) e^{-\frac{p}{2}y} + \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(y) e^{-\frac{p}{2}|y|})$$

Rq: La connaissance des lois marginales n'est pas suffisante pour connaître la loi conjointe.

Def 14: Sat $X_1, \dots, X_n$ des v.a.n. On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes lorsque $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

Proposit° 15: Sat $X_1, \dots, X_n$ des v.a.n. Alors, $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si la loi du vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ est le produit des lois individuelles.

[GK]

Propositi^o 16: Soit X, Y deux variables aléatoires indep. Alors la loi de $X+Y$ est $P_{X+Y} = P_X * P_Y$.

APPJ
136

Th 17: Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires. on suppose que:

- ① $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendants.
- ② $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendants.
- ③ $X_i \sim Y_i \quad \forall i \in [1, n]$.

Alors, les vecteurs X et Y suivent la m^{me} loi.

Exemple 18: Si $X_1, \dots, X_n$ sont indep. et symétriques, alors $S = \sum X_i$ est symétrique.

Eg: G th. devient faux si l'on enlève l'une des hyp. d'indép.

Contre exemple 19: $X_1 = X_2 \sim B(\frac{1}{2})$. Y_1, Y_2 indep. et de loi $B(\frac{1}{2})$. Alors $S = X_1 + X_2 \sim \frac{1}{2} \delta_0 + \frac{1}{2} \delta_2$ et $T = Y_1 + Y_2 \sim B(1, \frac{1}{2})$.

II. Caractérisation de la loi.

A) Fonctions de répartition. [APPJ]; [Ouvr2]

Def^o 20: Soit X une variable aléatoire réelle. Sa fonction de répartition F_X est la foncl^o définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Th 21: La foncl^o de répartition caractérise la loi. Plus précisément, si X et Y sont deux variables aléatoires de m^{me} foncl^o de répartition, alors elles ont m^{me} loi.

Propositi^o 22: Soit X une variable aléatoire de foncl^o de répartition F_X .

Alors:

- ① F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
- ② F_X est continue à droite.
- ③ Les éventuels sauts de discontinuité ont lieu en des points pour lesquels l'événement $\{X=a\}$ n'est pas négligeable.
- ④ $F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

[Ouvr2]

Th 23: Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une v.a. r. Par X admette une densité, il faut et il suffit qu'il existe une fonction positive f_X Riemann intégrable tq $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X d\mu$.

Exemple 24: Si $X \sim \mathcal{E}(1)$, $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

B) Fonctions génératrices. [APPJ] p. 268

Def^o 25: Soit X une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $p_n = P(X=n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n t^n$.
 $G: t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$.

Propositi^o 26: La série $\sum p_n t^n$ est de rayon au moins 1 et par tout t tel que $\sum p_n t^n$ converge absolument, $G(t) = E(t^X)$.

Propositi^o 27: Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une v.a. d. Notons G sa fonction génératrice. Alors:

- ① G est définie sur $[-1, 1]$ au moins, $[0, 1]$ au moins.
- ② $G(1) = 1$; $0 \leq G(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1]$.
- ③ G est croissante et convexe sur $[0, 1]$.

Th 28: Soit X une v.a. d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $G = \sum_{n \geq 0} p_n t^n$ sa fonction génératrice. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$.

Ainsi, la fonction génératrice caractérise la loi de X .

Exemple 29: Figure 3: Tableau des foncl^o génératrices classiques.

Th 30: Soit X et Y 2 v.a. d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes. Alors, la fonction génératrice de $X+Y$ est $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Th 31: Soit X une v.a. d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors, $X \in L^k(\mathbb{N})$ si et seulement si G_X est k -fois dérivable à gauche en 1, et dans ce cas, $G_X^{(k)}(1) = E(\prod_{i=0}^{k-1} (X-i))$.

En particulier, $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.

C) Fonctions caractéristiques. [OUV 2] p. 131

Def° 32: Soit μ une mesure bonne sur $\mathbb{R}$. On appelle transformée de Fourier de μ l'application $\hat{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par:
 $\forall t \in \mathbb{R}, \hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x).$

Def° 33: On appelle fonction caractéristique de la variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la transformée de Fourier de la loi P_X .

Notat°: φ_X .

Rq: $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X(t) = E(e^{itX})$.

Propositi° 34: ① $\varphi_X(0) = 1$ ② $|\varphi_X(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$.
 ③ $\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at) e^{ibt}$ ④ φ_X est unif. continue sur $\mathbb{R}$.

Exempl° 35: Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Th 36: La fonction caractéristique caractérise la loi.

Appl° 37: (Calcul de la fonc° caractéristique de la loi Γ).

Soit $X \sim \Gamma(a,d)$ ($a, d > 0$). Alors $\varphi_X(t) = \left(\frac{d}{d - it} \right)^a$.

DEV 1.a.

Th 37: Si φ_X est $2n$ -fois dérivable en 0, alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2n$ et ils sont donnés par
 $E(X^k) = (-i)^k \varphi_X^{(k)}(0).$

Appl° 39: Si $X \sim \Gamma(a,d)$, alors X admet des moments à tout ordre et $\forall n \in \mathbb{N}, E(X^n) = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{d^n}$. DEV 1.b.

III. Convergence en loi. [OUV 2] p. 300.

Def° 40: Soit (μ_n) une suite de mesures finies sur les bornés de $\mathbb{R}$ et μ une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On dit que (μ_n)

converge étroitement vers μ si pour toute fonction f continue et bonne,
 $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$

Def° 41: Soit (X_n) une suite de v.a. et X une v.a. Par abus on note P_{X_n} la loi de X_n et P_X la loi de X . On dit que (X_n) converge en loi vers X si $P_{X_n} \rightarrow P_X$ étroitement.

Notat°: $P_{X_n} \xrightarrow{L} P_X$.

Rq: Le th. de transfert donne donc $X_n \xrightarrow{L} X$ si, et seulement si, pour toute $f \in \mathcal{C}^0$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cont. bonne, $E(f(X_n)) \rightarrow E(f(X))$.

Th 42: (Paul Lévy). Soit pour $n \in \mathbb{N}, X_n$ une v.a. de fonc° caractéristique φ_{X_n} . Alors $X_n \xrightarrow{L} X$ si, et seulement si, $\varphi_{X_n} \rightarrow \varphi_X$ simplement.

Th 43: Soit pour $n \in \mathbb{N}, X_n$ une v.a. de fonc° de répartit° F_{X_n} et X une v.a. de fonc° de répartit° F_X . Alors $X_n \xrightarrow{L} X$ si, et seulement si, pour tout point de continuité x de F_X , on a $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$.

Th 44: (Central limite). Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de même loi et admettant un moment d'ordre 2. Alors,
 $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (X_j - E(X_0)) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \text{Var}(X_0)).$

Appl° 45: $n! \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

DEV 2.