

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et E un ensemble.

I. Variables aléatoires discrètes.

A) Définitions [R011] p. 713 ; [Cuv2] p. 20

Def¹: On appelle variable aléatoire discrète toute application $X: \Omega \rightarrow E$ vérifiant:

- $X(\Omega)$ est dénombrable
- $\forall x \in E, X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

Def²: Soit $X: \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire discrète. Alors, l'application $P_X: \mathcal{P}(E) \rightarrow [0,1]$ $A \mapsto P_X(A) = P(X \in A)$

est une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$.

Def³: Soit $X: \Omega \rightarrow E$ une v.a.d. Alors P_X est appelée la loi de probabilité de X .

Proposition 4: Soit $X: \Omega \rightarrow E$ une v.a.d. Alors la famille $(P(X=x))_{x \in E}$ caractérise la loi de X .

Exemple 5: La probabilité qu'en jetant 6 dés équilibrés et discernables toutes les faces exhibent un chiffre différent est de $\frac{6!}{6^6}$.

B) Loïs discrètes classiques. Prenons $E = \mathbb{R}$ [R011] p. 714 ; [Cuv2] p. 133

*** Loi uniforme:** On dit qu'une v.a.d. suit la loi uniforme de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ si $\# X(\Omega) = n$ et si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, alors $\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(X=x_k) = \frac{1}{n}$.

Exemple 6: X représente le résultat d'un lancer de dé.

Notation: $X \sim \mathcal{U}(n)$.

*** Loi de Bernoulli:** On dit qu'une v.a.d. X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X=0) = 1-p, P(X=1) = p$.

Notation: $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Cette loi permet de décrire les expériences à 2 issues possibles.

Exemple 7: pour tout $A \in \mathcal{A}$, la fonction 1_A suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

*** Loi Binomiale:** On dit que X suit une loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ si $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$ et $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \forall k \in \{0, \dots, n\}$.

Exemple 8: On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Le nombre X de "pile" obtenus suit une loi Binomiale de paramètre n et $\frac{1}{2}$.

Notation: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

*** Loi de Poisson:** On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{N}^*$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Notation: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

*** Loi géométrique:** On dit que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.

Notation: $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exemple 9: On lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. Le nombre de lancers effectués suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

C) Indépendance. [R011] p. 723 et [Cuv2] p. 61.

Def¹⁰: On dit que 2 variables aléatoires discrètes X, Y sont indépendantes si pour toutes parties A, B de E , on a: $P(X \in A \cap Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$.

Def¹¹: Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires discrètes. On dit que ces variables aléatoires sont indépendantes

si pour toute partie finie J de I et toute famille $(A_j)_{j \in J}$ de parties de E , on a :

$$P\left(\bigcap_{j \in J} (X_j \in A_j)\right) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j).$$

Proposition 12 : Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de v.a.d. les (X_i) sont indépendantes si, et seulement si pour toute partie finie $J \subset I$ et toute suite $(t_j)_{j \in J} \subset E$, on a :

$$P\left(\bigcap_{j \in J} (X_j = t_j)\right) = \prod_{j \in J} P(X_j = t_j).$$

Application 13 : En considérant $\Omega = \{1, -1, n\}$ ($n \geq 2$) on considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ avec p uniforme. En considérant les événements $A_d = \{kd, k \in \Omega \text{ et } kd \in \Omega\}$ pour $d|n$, on peut montrer que $P(n) = n \prod_{\substack{p|n \\ p \text{ premier}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Proposition 14 : Soit X_1, X_2 deux v.a.d. et indépendantes à valeurs dans E . Alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ est discrète et $\forall n \in E$,

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k_1 \in E} P(X_1 = k_1) P(X_2 = n - k_1) \\ &= \sum_{k_2 \in E} P(X_1 = n - k_2) P(X_2 = k_2). \end{aligned}$$

Exemple 15 : Soit $(X_k)_{k \in [1, n]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p . La variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi Binomiale de paramètre n, p .

Exemple 16 : Soit $X_1, \dots, X_n$ v.a.d. tq $\forall i, X_i \sim \mathcal{P}(d_i)$, alors $X = \sum X_i \sim \mathcal{P}(\sum d_i)$. **DEV 2 a**.

II - Moments d'une variable aléatoire discrète.

A) Espérance : [Ouv 1] p. 115, [R07] p. 732.

Soit X une v.a.d. réelle.

Def 17 : Si la famille $(nP(X=n))_{n \in \mathbb{R}}$ est sommable, on dit que X admet une espérance notée alors $E(X)$ et définie par $E(X) = \sum_{n \in \mathbb{R}} nP(X=n)$.

Exemple 18 : Si $X \sim \mathcal{U}(n)$, alors $E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X=k) = \frac{n+1}{2}$.

Th 19 (Transfert) : Soit X une v.a.d. Notons $(\kappa_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des valeurs prises par X . Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. L'application $Y = f \circ X$ est une v.a.d. réelle qui admet une espérance si, et seulement si la famille $(P(\kappa_i)P(X=\kappa_i))_{i \in I}$ est sommable et dans ce cas,

$$E(f(X)) = \sum_{i \in I} f(\kappa_i) P(X=\kappa_i).$$

Notation : On note $\mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{A}, p)$ l'ensemble des v.a.d. n telles que $E(|X|) < +\infty$.

Proposition 20 : $\mathcal{L}_d^1(\Omega)$ est un espace vectoriel et $X \mapsto E(X)$ est une forme linéaire.

App 21 (Places libres dans un parking) : On considère des voitures de longueur 2 et un parking de n places de longueur 1. À chaque fois qu'une voiture arrive, elle se gare sur 2 places restantes de la forme $(i, i+1)$ où i est choisi selon une loi uniforme parmi les places restantes. On continue jusqu'à ce qu'aucune voiture ne puisse plus se garer. Alors, le nombre moyen de places restantes à la fin des processus dans un parking de n places est équivalent à $\frac{n}{e}$ qd $n \rightarrow +\infty$. **DEV 4**

Th 22 (Markov) : Soit $X \in \mathcal{L}_d^1(\Omega)$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, on a :

$$P(|X| > \varepsilon) \leq \frac{E(|X|)}{\varepsilon}.$$

Th 23 : Soit $X, Y \in \mathcal{L}_d^1(\Omega)$ v. indep. Alors $XY \in \mathcal{L}_d^1(\Omega)$ et on a : $E(XY) = E(X)E(Y)$.

B) Variance . [R07] p. 734

Def° 24: On dit qu'une v.a.d. X admet un moment d'ordre 2 si la variable aléatoire X^2 admet une espérance.

Notat°: $\mathcal{L}_d^2(\Omega)$.

Prop° 15: $\mathcal{L}_d^1(\Omega) \subset \mathcal{L}_d^2$ et $\forall X, Y \in \mathcal{L}_d^2, XY \in \mathcal{L}_d^1$.

Def° 26: Soit X une v.a. d'espérance $E(X)$. On appelle variance de X le réel $\sigma_X^2 = E((X - E(X))^2)$.

Proposit° 27: Soit $X \in \mathcal{L}_d^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a:

$$\textcircled{1} \sigma_{\lambda X}^2 = \lambda^2 \sigma_X^2.$$

Th 28: (Brenaymè-Tchebychev). Soit $X \in \mathcal{L}_d^2$. $\forall \varepsilon > 0$, on a:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}.$$

III. Séries génératrices . [R07] p. 740

Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une v.a.d.

Lemme 29: La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(X=n) t^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$ et a un rayon de convergence $R_X \geq 1$.

Def° 30: On appelle série génératrice de X la série $\sum_{n \geq 0} p(X=n) t^n$.

Th 31: Notons g_X la fonction génératrice de X . Alors:

$$\textcircled{1} g_X \in \mathcal{C}^\infty([-1, 1]) \text{ et } g_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} p(X=n) t^{n-k}.$$

$$\textcircled{2} g_X \text{ est croissante et convexe sur } [-1, 1].$$

$$\textcircled{3} \forall n \in \mathbb{N}, p(X=n) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!} \text{ i.e.: la fonct° génératrice caractérise la loi.}$$

Exemple 32: Pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $g_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

DEV 33: Processus de Galton Watson.

IV. Convergence en loi . [ouv 2]

Def° 33: Soit (X_n) une suite de v.a.d. On dit que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X si pour toute fonction continue bornée $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a:

$$E(f(X_n)) \rightarrow E(f(X)).$$

Th 34: (Lévy). Soit pour $n \in \mathbb{N}$, une v.a.d. et X une v.a. $\varphi_{X_n}: t \mapsto E(e^{itX_n})$ et $\varphi_X: t \mapsto E(e^{itX})$. Alors $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ si, et seulement si, $\varphi_{X_n} \rightarrow \varphi_X$ simplement.

Th 35: Soit (X_n) une suite de v.a.d. et X une v.a.d. Alors, $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ si, et seulement si, $\forall k \in \mathbb{Z}, P(X_n=k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X=k)$.

Th 36: Soit pour $n \in \mathbb{N}$, X_n une v.a. de fonction de répartition F_{X_n} et X une v.a. de fonct° de répartition F_X . Alors $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ si, et seulement si, pour tout point de continuité x de F_X , on a: $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$.

Th 37: (Central - limite). Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. Alors, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (X_j - E(X_0)) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma_{X_0}^2)$.

App° 38: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

DEV. 2-6.