

Sait $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ un espace probabilisé.

I. Notions d'indépendance

A) Événements indépendants [APP] p. 54

Def° 1: Deux événements $A, B \in \mathcal{F}$ sont dit indépendants si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Rq: La not° d'indépendance dépend donc de la probabilité p .

Proposil° 2: Sait A, B deux événements. Alors

- ① Si $p(A) > 0$, alors $(A \text{ et } B \text{ sont indépendants}) \Leftrightarrow (p(B|A) = p(B))$.
- ② Ω et $\emptyset$ sont indépendants de tout autre événement.
- ③ A est indépendant de lui-même si, et seulement si $p(A) \in \{0, 1\}$.
- ④ Si A et B sont indépendants, alors A et B^c le sont et donc aussi A^c et B^c et A^c et B .
- ⑤ Si A est négligeable ou presque sûr, alors A est indépendant de B .

Def° 3: Des événements $A_1, \dots, A_n$ sont dit indépendants si pour tout entier $p \leq n$ et tout p -uplet d'indices $(i_1, \dots, i_p)$ deux à deux distincts, on a: $p(\bigcap_{k=1}^p A_{i_k}) = \prod_{k=1}^p p(A_{i_k})$.

Proposil° 4: Sait $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements indépendants. Sait $\varepsilon: I \rightarrow \{+1, -1\}$. Posons $B_i = \begin{cases} A_i & \text{si } \varepsilon_i = +1 \\ A_i^c & \text{si } \varepsilon_i = -1 \end{cases}$. Alors, $(B_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements indépendants.

Exemple 5: Si φ désigne l'indicateur d'Euler, alors, on a:

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{i}\right).$$

B) Indépendance de variables aléatoires. [APP] p. 176

Def° 6: On dit que 2 variables aléatoires X et Y sont indépendantes si $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $p(X \in A, Y \in B) = p(X \in A)p(Y \in B)$.

Notat°: $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Def° 7: Sait $X_1, \dots, X_n$ des var. On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour tout événements $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $p(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n p(X_i \in A_i)$.

Proposil° 8: Sait $X_1, \dots, X_n$ des v.a.n.i. Pour toutes fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les variables $\varphi_1(X_1), \dots, \varphi_n(X_n)$ sont indépendantes. [Admis].

Th 9: (Lemme des coalitions) Sait $X_1, \dots, X_n$ des v.a.n.i. Sait $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Sait $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables. Alors $Y = \varphi(X_1, \dots, X_k)$ et $Z = \psi(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indep.

Th 10: Sait $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ 2 familles de n variables aléatoires. On suppose que

- ① $X_1, \dots, X_n$ sont indépendants
- ② $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendants
- ③ $X_i \sim Y_i \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Alors les vecteurs $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ suivent la même loi. **Contre-exemple 11:** $X_1 = X_2 \sim B(\frac{1}{2})$. Alors $X_1 + X_2 \sim 2X_1$ et $X_1 + X_2 \sim \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_2$. Si Y_1, Y_2 suivent la même loi $B(\frac{1}{2})$ abs $Y_1 + Y_2 \sim B(2, \frac{1}{2})$.

II. Propriétés de l'indépendance.

A) Moments de variables indépendantes. [APP] + [HAU]

Th 12: Sait X, Y 2 v.a.n.i indépendantes et intégrables. Alors XY est intégrable et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Def° 13: Sait X, Y 2 v.a.n. admettant un moment d'ordre 2.

On appelle covariance de (X, Y) la quantité: $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$.

Rq: $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Def° 14: 2 v.a.n. X et Y sont ditn discorrelés si $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Th 15: Si X, Y sont 2 v.a.n indépendantes, alors $Cov(X, Y) = 0$.
 en particulier, on a $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Contre-exemple 16: Soit $X \sim \frac{1}{3} \delta_1 + \frac{1}{3} \delta_0 + \frac{1}{3} \delta_{-1}$. Posons $Y = X^2$. Alors, $Cov(X, Y) = 0$ mais X et Y ne sont pas indépendantes.

B) So mmme de variables aléatoires indépendantes. [APP]

Th 17: Soit X, Y 2 v.a. d indépendantes. Alors la fonction génératrice de $X+Y$ est $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Rq: On obtient ainsi que $P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^n P(X=k)P(Y=n-k)$.

Contre-exemple 18: $X \sim U(\mathbb{I} \pm, 3\mathbb{I})$ $Z \sim \frac{1}{3} \delta_0 + \frac{2}{3} \delta_1$ indep.
 de X et $Y = X + Z \mod(3)$.
 X et Y ne sont pas indépendantes alors que $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Proposil° 19: Soit $X \perp Y$ 2 v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- ① Si $X \sim B(n, p)$ et $Y \sim B(m, p)$, alors $X+Y \sim B(n+m, p)$.
- ② Si $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$, alors $X+Y \sim P(\lambda+\mu)$.

Th 20: Soit X, Y 2 v.a.n à densité f_X et f_Y . Si X et Y sont indépendantes, alors $S = X+Y$ est à densité et $f_S = f_X * f_Y$.

Th 21: Soit $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Si $X \perp Y$, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Def° 22: Soit X une var. On appelle fonction caractéristique de X la fonction $\varphi_X(t) = E(e^{itX})$.

Exemple 23: Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Th 24: Soit X, Y 2 v.a.n. Alors, il y a équivalence entre:
 ① $\varphi_X = \varphi_Y$ ② X et Y ont même loi.

Th 25: Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a.n indépendantes. Soit $S = \sum_{j=1}^n X_j$. Alors $\varphi_S = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}$.

Proposil° 26: Si $X \sim \mathcal{E}(m, a)$, $Y \sim \mathcal{E}(m', a')$, alors $X+Y \sim \mathcal{E}(m+m', a+a')$.

III. Indépendance et théorèmes limites.

A) Bonne - Cantelli. [APP]

Th 27: Soit (A_n) une suite d'événements telle que la série $\sum_n P(A_n)$ converge, alors $P(\limsup A_n) = 0$.

Th 28: Soit (A_n) une suite d'événements indépendants. Alors l'événement $\limsup A_n$ ne peut être que de probabilité 0 ou 1.
 Si $\sum P(A_n)$ converge, alors $P(\limsup A_n) = 0$.

Si $\sum P(A_n) = \infty$, alors $P(\limsup A_n) = 1$.

Apptical° 29: Munissons l'ensemble $\mathbb{N}$ de la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et de la probabilité μ définie par $\mu(\{k\}) = \frac{1}{k!}$. Alors, il n'existe pas de probabilité ν sur $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ telle que $\nu(k) = \frac{1}{k!}$.

B) Lois des grands nombres. [APP]

Th 30: (Loi faible des grands nombres). Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même espérance m et de même variance σ^2 . Alors, $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{P} m$.

Rq: On peut affaiblir l'hypothèse L^2 en une hypothèse L^1 .

Th 31: (Loi forte des grands nombres). Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d, de même loi qu'une variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 1. Alors, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} m$.

C) Convergence en loi et Théorème limite central. [App]

Th 32: Soit (X_n) une suite de v.a. n. Notons $\varphi_n = \varphi_{X_n}$.
 $\forall n \geq 1$, Soit X une v.a. n. Alors, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si, et seulement si, $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers φ_X .

Propositi° 33: Soit $(X_n), (Y_n), X, Y$ des variables aléatoires.
 On suppose que

① $X_n \perp\!\!\!\perp Y_n, \forall n \geq 1, \quad X \perp\!\!\!\perp Y,$

② $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X; \quad Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y.$

Alors, la suite (X_n, Y_n) des couples converge en loi vers (X, Y) et
 notant, $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y; \quad X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} XY.$

Th 34: (Central - Limite). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. n.
 indépendantes et identiquement distribuées, de carrés intégrables.
 On note $m = E(X_1)$ pour espérance, σ^2 pour variance avec
 $\sigma^2 > 0$. Posons $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ et $Y_n = \frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}}.$
 Alors, $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{CP}(0, 1).$

Applicati° 35: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

DEV 2.