

1/3

K est un corps, E un K -ev de dimension $n \geq 1$

I) Généraliser sur le groupe linéaire

1) Définition - premier exemple

Def 1: Le groupe linéaire de E noté $GL(E)$ est le groupe des K -automorphismes de E ie des endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ qui sont réversibles.

Rq 2: La donnée d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E induit un isomorphisme de $GL(E)$ vers $GL_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid \exists M^{-1} \in \mathcal{M}_n(K) \mid MM^{-1} = M^{-1}M = I_n\}$. On a alors pour tous $M, N \in GL_n(K)$: $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.

Thm 3: Soit $\det : \mathcal{L}(E) \rightarrow K$ l'application déterminant.

(i) $GL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det u \neq 0\}$

(ii) $\det : GL(E) \rightarrow K^*$ est un morphisme de groupes.

Def 4: Le groupe spécial linéaire de E est $SL(E) = \det^{-1}(1)$. C'est un sous-groupe distingué de $GL(E)$ et on a un isomorphisme $SL(E) \cong SL_n(K)$. $\{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid \det M = 1\}$.

Rq 5: On a une suite exacte suivante : $1 \rightarrow SL(E) \xrightarrow{\det} GL(E) \xrightarrow{\det} K^* \rightarrow 1$ donc $GL(E) \cong SL(E) \rtimes K^*$.

2) Générateurs, centre, groupe dérivé - application

Def 6: On appelle matrice de transposition standard sur E la matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ de la forme $T_E(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$.

$\lambda \in K^*$, $i \neq j$ (E_{ij} = matrices élémentaires). On appelle matrice de dilatation une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq 1$, $\lambda \in K^*$.

Def 7: (a) Une dilatation de E est un automorphisme de E de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ dans une base de E où $\lambda \in K^* \setminus \{1\}$.

(ii) Les transpositions d'hyperplan $H = \ker f$, $f \in E^*$ et de droite $D = \ker(a)$, $a \in E \setminus \{0\}$ est définie $m(a) = x + f(x)a$, $x \in E$.

Rq 8: u est une transposition si $\det u = -1$ ou $\det u = 1$.

Thm 9: Via l'isomorphisme du point a, pour on prouve : (i) Si $M \in GL_n(K)$, M est T_n . T_n est D ou H . La transposition standard est D dilatation.

(ii) $SL_n(K)$ est engendré par les transpositions standard et dilatation engendrant $SL(E)$.

Rq 10: Si T transposition d'hyperplan H et de droite D et $u \in GL(E)$, $u \in u^{-1}$ est la transposition d'hyperplan $u(H)$, de droite $u(D)$.

Ca 11: Deux transpositions sont conjuguées dans $GL(E)$ si $n \geq 3$ dans $SL(E)$.

Thm 12: Le centre de $SL(E)$ est $SL(E) \cap Z(GL(E))$ de E . Le centre de $SL(E)$ est $\{ \lambda \in K^* \mid \lambda^n = 1 \}$.

Def 13: Le groupe projectif linéaire est $PGL(E) = GL(E) / Z(GL(E))$. De même $PSL(E) = SL(E) / Z(SL(E))$. On définit $PGL_n(K)$ avec $PSL_n(K)$ et $PSL_n(K)$.

Thm 14: On a $P(GL(E)) = PGL(E)$ et $n \geq 3$ ou $|K| \geq 4$, $P(SL(E)) = PSL(E)$.

Thm 15 (Steinitz): Si $m \geq 3$ ou $|K| \geq 4$, $PSL(E)$ est simple.

Rq: Deux cas particuliers : $H \triangleleft SL(E)$, $H = SL(E)$ ou $H \subset Z(SL(E))$.

3) Les cas finis ($K = \mathbb{F}_q$, $q \geq 3$ dans cette partie).

Rq 16: On a les cas suivants :

(ii) $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=1}^n (q^n - q^{i-1})$ (iii) $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$

(iv) $|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = |SL_n(\mathbb{F}_q)| / n \cdot 1(q-1)$ (v) $|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|SL_n(\mathbb{F}_q)|}{n \cdot 1(q-1)}$

Ca 17: isomorphismes exceptionnels: (i) $GL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$, $SL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$, $PSL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$

(ii) $PGL_2(\mathbb{F}_3) \cong S_4$, $PSL_2(\mathbb{F}_3) \cong A_4$.
(iii) $PGL_2(\mathbb{F}_4) \cong PSL_2(\mathbb{F}_4) \cong A_5$, $PSL_2(\mathbb{F}_5) \cong S_5$

Prop 18: Si $n \geq 1$, on a un morphisme injectif $S_n \rightarrow GL_n(K)$
 $\sigma \mapsto P_\sigma$

on $(P_\sigma)_{\sigma \in S_n} = \delta_{\sigma, id} \cdot$. De plus $\det P_\sigma = \epsilon(\sigma)$

Ca 19: G groupe fini de cardinal n . G se plonge dans $GL_n(K)$

Ca 20: G fini de cardinal p^m , p premier, n tel $m \geq 1$. G agit sur un n -groupe de Sylow p -a. (Thm de Sylow)

II) Actions des groupes linéaires et non-groupes

1) Equivalence et similitude

Prop 21: $GL(E) \times GL(E)$ agit sur $f(E)$ via $(v, u) \cdot u = v \cdot u$

L'orbite de $u \in f(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de même rang que u .

Ca 22: le rang de $u \in GL_n(K)$ est invariant par conjugaison de $GL_n(K)$

Prop 22: $GL(E)$ agit sur $f(E)$ via $u \cdot v = u \circ v \cdot u^{-1}$. L'orbite de $u \in f(E)$ est un classe de similitude.

Prop 23: On trouve certaines matrices de $GL_n(K)$ de même rang et de même similitude que u .

Prop 24: $u \in f(E)$ est diagonalisable si $\exists$ une base de E telle que u est diagonale.

Prop 25: Pour une matrice diagonalisable, on peut trouver une base de E telle que la matrice est diagonale.

2) Actions sur les racines simples

Prop 26: $GL(E)$ agit sur $\bigoplus_{i=1}^n E_i = E$ via $(E_1, \dots, E_n) \mapsto (u(E_1), \dots, u(E_n))$

le stabilisateur de $(E_1, \dots, E_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ est le sous-groupe de $GL(E)$ formé des éléments u tels que $u(E_i) \subset E_i$.

Prop 27: $GL(E)$ agit sur $\bigoplus_{i=1}^n E_i = E$ via $(E_1, \dots, E_n) \mapsto (u(E_1), \dots, u(E_n))$

V_i , $\dim E_i = n_i$ et $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ via la même action.

Ca 28: le nombre de matrices diagonalisables de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est $\sum_{m_1 + \dots + m_n = n} \frac{1}{|GL_n(\mathbb{F}_q)|} \prod_{i=1}^n |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|$

(ii) le nombre de matrices nilpotentes de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est $\sum_{m_1 + \dots + m_n = n} \frac{1}{|GL_n(\mathbb{F}_q)|} \prod_{i=1}^n |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|$

3) Actions sur les formes quadratiques - Groupes orthogonaux

Prop 29: u agit sur $Q(E)$, l'ensemble des formes quadratiques sur E via $u \cdot q(x) = q(u^{-1}(x))$. L'orbite de q est l'ensemble des formes quadratiques équivalentes à q .

De même, $GL_n(K)$ agit sur $S_n(K) = \{M \in M_n(K) \mid M^t = M^{-1}\}$.

Thm 30: Si K est algébriquement clos, l'orbite de $q \in Q(E)$ est formée des formes quadratiques de même rang que q .

(ii) Si $K = \mathbb{R}$, l'orbite de q est l'ensemble des $q \in Q(E)$ de même rang et de même signature (p, q) . (Sylvester)

(iii) Si K fini, l'orbite de q non dégénérée est formée des q de même déterminant $\det(q) = \det(q_0) / \det(q_1)$: $q_0, q_1 \in K^*$

Def 31: Le noyau de $q \in Q(E)$ non dérivé est appelé groupe orthogonal de q , noté $O(q)$: se $e \in O(q)$ me $\forall x \in E$, $q(x) = q(ax)$ (circuits de q).

$\tilde{E}_n$: le groupe orthogonal associé à l'identité $\alpha = O_n(\mathbb{R})$: $\{x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid x^T M x = I_n\}$.

Prop 32: Si q a des diagonales, se $e \in O(q)$ vérifie $det(e) = \pm 1$.
 $O^+(q) = \{x \in O(q) \mid det(x) = 1\} \triangle O(q)$.

$\tilde{E}_n$: Si $n \in E$ est un inductif, $\langle x, y \rangle^+ = \text{trace}$ sur $\mathcal{H}_{\text{supp}(x)}$ et la symétrie λ_x définie par $\lambda|_H = id_H$, $\lambda(x) = -x$ est élément de $O(q)$: c'est la réflexion d'hyperplan H . $\square$

Thm 33: Tout élément de $O(q)$ est produit d'un nombre n réflexion.

Prop 34: Pour $n = 2$ on a en fait que tout élément de $O(q)$ $O(q)$ est une réflexion.

III) Soit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, on peut hypergéométrique

1) Exemple de $GL_n(K)$

Prop 34: (i) $GL_n(\mathbb{C})$ est un espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, derrière dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et caractère par auto.

(ii) $GL_n(\mathbb{R})$ est un espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, derrière dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et non caractère par auto.

Prop 35: $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes caractères par auto.
 $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid det M > 0\}$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n^+(\mathbb{R})$.

$GL_n^+(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{R})$ est caractère par auto.

Prop 36: $O_n(\mathbb{R})$ est un non-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

Thm 37: Soit G un non-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{M}_n$ G est conjugué à un non-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Prop 38: $SO_n(\mathbb{R}) = O_n^+(\mathbb{R})$ est caractère par auto. $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes caractères par auto.

Prop 39: $O_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^T A = I_n\}$ est compact, caractère par auto dans $GL_n(\mathbb{C})$.

Application 40: La décomposition polaire $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homomorphisme, idem sur $GL_n(\mathbb{C})$.

2) Calcul différentiel

Prop 41: $GL_n(\mathbb{R})$ est un espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ compact différentiable. Le calcul différentiel.

Prop 42: Le produit et λ invariant de $GL_n(\mathbb{R})$ est un élément de $O(q)$.

Prop 43: (i) $SL_n(\mathbb{R})$ est un non-compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.

(ii) $O_n(\mathbb{R})$ est un non-compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Lemme 44: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}})_{k \rightarrow \infty} \rightarrow e^{A+B}$.

Ca 45: G un non-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n$ G est conjugué à un non-groupe compact de $O_n(\mathbb{R})$.

Thm 46: Un non-groupe compact G de $GL_n(\mathbb{R})$ est un non-compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que $\mathcal{M}_n$.