Leçon 183 - Utilisation des groupes en géométrie.

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps, V et V' sont des $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie. On notera E, E' les espaces affines sur V, V'.

1. Géométrie affine. —

1. *Espace affine, applications affines.* —

- Def : On appelle espace affine un ensemble E sur lequel le groupe $(V,+)$ agit à droite transitivement et librement. On note M, N les éléments de E, appelés points, et $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ les éléments de V, qui sont des vecteurs.
  Pour tous M,N dans E, on a ainsi un unique élément $\overrightarrow{x}$ de V tel que $N = E + \overrightarrow{x}$. On note $\overrightarrow{MN}$ cet élément.
- Pro : Les translations $t_{\overrightarrow{x}} : M \mapsto M + \overrightarrow{x}$ forment un sous-groupe de $Bij(E)$.
- Def : Soient E,E' des espaces affines sur V,V'. Une application $f : E \to F'$ est une application affine s'il existe $v_f : V \to V'$ linéaire telle que $\forall M \in E, \forall \overrightarrow{x} \in V$, $f(M + \overrightarrow{x}) = f(M) + v_f(\overrightarrow{x})$, càd : $f \circ t_{\overrightarrow{x}} = t_{v_f(\overrightarrow{x})} \circ f$.
- Pro : La partie linéaire v_f de f est unique. $f \mapsto v_f$ définit un morphisme de $Aff(E, E')$ vers $Lin(V, V')$.
- Pro : $f \in Aff(E, E')$ est injective/surjective ssi v_f est injective/surjective.
- Pro : $f \mapsto v_f$ est surjectif.
- Ex : Pour tout $A \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $M \mapsto A + \lambda\overrightarrow{AM}$ est une application affine, nommée homothétie de centre A et de rapport λ, qui vérifie $v_f = \lambda Id_V$.
- Def : Un système de points pondéré est la donnée de d couples $(A_i, \lambda_i) \in E \times \mathbb{R}$ pour $d \geq 1$, avec $\lambda_1 + \dot{+} \lambda_d \neq 0$.
- Def : Le barycentre d'un système de points pondérés est un point G tel que $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.
- Pro : Pour E' espace affine, une application $f : E \to E'$ est affine si et seulement si elle conserve les barycentres.

2. *Groupe affine.* —

- Def+Pro : L'ensemble des automorphismes affines de E forme un groupe pour la composition, noté $Aut(E)$, et nommé groupe affine de E.
- Pro : $f \in Aut(E) \mapsto v_f \in GL(E)$ est un morphisme surjectif de groupes, de noyau l'ensemble T des translations sur E.
- Pro : L'ensemble des homothéties sur E est un sous-groupe distingué de $Aut(E)$ contenant T, et contenant le groupe des homothéties de centre A pour tout $A \in E$.
- Pro : Une bijection affine conserve le parallélisme.
- Pro : Les homothéties sur E sont les applications affines qui envoient chaque droite sur une droite qui lui est parallèle.

2. Isométries et géométrie euclidienne. —

1. *Espace euclidien et groupe des isométries.* —

- Def : On appelle espace euclidien de dimension n un espace affine E sur un espace vectoriel euclidien V de dimension n. On se place dans ce cadre pour la suite de cette partie.
- Def : On appelle endomorphisme orthogonal de V un $f \in GL(V)$ qui préserve la norme. On note $O(V)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux.
- Def : $Isom(E)$ est l'ensemble des $f \in Aut(E)$ tels que $v_f \in O(V)$.
- Pro : $O(V)$,$Isom(E)$ sont des groupes.
- Thm : $O(V)$ est engendré par les réflexions orthogonales, et tout élément de $O(V)$ peut s'écrire comme le produit d'au plus n+1 réflexions.
- Ex : Une translation peut s'écrire comme le produit de 2 réflexions.
- Def : On appelle renversement de V une symétrie de V dont le sous-espace propre V_{-1} est de dimension 2.
- Ex : Les renversements de $\mathbb{R}^3$ sont les rotations d'angle Π.
- Thm : $SO(V) := \{f \in O(V) \text{ tq } det(f) = 1\}$ est un groupe engendré par les renversements.

2. *Angles orientés du plan.* —

- Pro : Étant donnés deux vecteurs du cercle unité S_1 de $\mathbb{R}^2$, il existe une unique rotation envoyant l'un sur l'autre.
  Ceci permet de construire la relation d'équivalence suivante sur $S_1 \times S_1$: $(u_1, v_1)R(u_2, v_2)$ ssi la même rotation envoie u_1 sur u_2 et v_1 sur v_2.
- Def : L'angle orienté de (u, v) est la classe de (u, v) dans $S_1 \times S_1/R$.
- Pro : $exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ est un morphisme de groupes surjectif dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.
  $Re(e^{it}) = cos(t)$, et $Im(e^{it}) = sin(t)$. On peut définir les fonctions sinus et cosinus de cette façon.
  On a un isomorphisme de groupes $t \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \mapsto e^{it} \in \mathbb{U}$.
- Pro : On a la suite de surjections :
$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{R},+) & \to & (\mathbb{U},\times) & \to & (SO_2(\mathbb{R}),\times) & \to & S_1 \times S_1/R \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} & \mapsto & \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} & \mapsto & (\overrightarrow{1}, \overrightarrow{e^{i\theta}}) \end{array}.$$
- Def : Pour f une rotation du plan, il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que la matrice de f dans la base canonique soit de la forme $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$, et on l'appelle angle de la rotation f.
- Def : Mesure d'un angle.
- App : Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $\exists!(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tq $x + iy = r.e^{i\theta}$.
  θ est alors appelé l'argument de z.
- App : Formule d'Al-Kashi.
- App : Un triangle ABC de sommets d'affixes a,b,c est équilatéral ssi $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0$.
- App : Les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un n-gone régulier.

- App : Théorème de l'angle inscrit : Soit Γ un cercle de centre O, et A,B,M trois points distincs sur le cercle. Alors $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \bmod(2\pi)$.

3. Les quaternions en géométrie. —

- Def : L'algèbre $\mathbb{H}$.
- Def : Conjugué d'un quaternion, l'application $N(z) := z\overline{z}$.
- Pro : Pour l'isomorphisme d'ev $z = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mapsto (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on a $N(z) = \|(a,b,d,c)\|_2^2$.
  Donc $z \mapsto \sqrt{N(z)}$ est une norme sur $\mathbb{H}$.
- Pro : $N(zz') = N(z)N(z')$.
- Pro : $\mathbb{H}$ est une algèbre à division.
- App : Pour G le groupe des quaternions de norme 1 et $SU_2(\mathbb{C})$ le groupe des automorphismes unitaires de $\mathbb{C}^2$, on a $SU_2(\mathbb{C}) \simeq G$.
  Ceci fait l'analogue avec l'isomorphisme de groupes existant entre $SO2(\mathbb{R})$ et $\{z \in \mathbb{C}tq|z| = 1\}$.
- **Dev** : Soit G le groupe des quaternions de norme 1. Alors $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.
- Rem : Cet isomorphisme, permet de ramener le calcul de l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ par une rotation à des produits dans $\mathbb{H}$ en identifiant les vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ du repère orthonormé canonique de $\mathbb{R}^3$ aux éléments i,j,k de $\mathbb{H}$.

3. Eléments de géométrie projective. —

On considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}ou\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K} - ev$ de dimension finie.

1. Espaces projectifs et homographies. —

- Def : La relation $xRy \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $x = \lambda y$ est une relation d'équivalence sur $E^2 - \{0\}$.
  On définit $P(E) := (E^2 - \{0\})/R$, et on note $dim(P(E)) = dim(E) - 1$.
  On note $P_1(\mathbb{K}) := P(\mathbb{K}^2)$ la droite projective sur $\mathbb{K}$.
- Rem : $P(E)$ est l'ensemble des droites vectorielles de E, que l'on peut munir de la topologie quotient.
  On peut considérer $P_1(\mathbb{K})$ comme une droite affine de $\mathbb{K}^2$ complétée par un point à l'infini.
- Pro : $P_1(\mathbb{K})$ muni de la topologie quotient est homéomorphe à $K \cup \{\infty\}$.
- Pro : La projection stéréographique permet d'obtenir un homéomorphisme entre $P_1(\mathbb{C})$ et la sphère unité réelle S_2.
- Def : Soient E,E' deux $\mathbb{K}-ev$. On appelle homographie une application $g : P(E) \to P(E')$ telle qu'il existe une application linéaire bijective $f : E \to E'$ telle que le diagramme suivant commute :
  $$\begin{array}{ccc} E-\{0\} & \to_f & E'-\{0\} \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ P(E) & \to_g & P(E') \end{array}$$
- Def+Pro : L'ensemble des homographies de $P(E)$ forme un groupe appelé groupe projectif de E, noté $GP(E)$.
- Cor : $GP(E) \simeq GL(E)/\mathbb{K}$.
- App : Théorème de Pappus généralisé.

2. Droite projective complexe et birapport. —

- Pro : Les homographies de $P_1(\mathbb{C})$ sont de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$, en choisissant pour convention de prolonger $z \mapsto \frac{1}{z}$ par ∞ en 0 et par 0 en ∞.
- Pro : Les homographies sont des bijections sur $P_1(\mathbb{C})$.
- Ex : Les similitudes directes sont des homographies. (dont les translations, rotations, homothéries)
- Ex : La fonction inverse est une homographie.
- Def : On note $PGl_2(\mathbb{C})$ le groupe des homographies de $P_1(\mathbb{C})$.
- Pro : $PGl_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes et la fonction inverse.
- Pro : Les homographies de $P_1(\mathbb{C})$ sont 3-transitives : pour tous 3-uplets de points distincts $(u_1,v_1,w_1),(u_2,v_2,w_2)$ dans $P_1(\mathbb{C})$, il existe une unique homographie f telle que $f(u_1) = u_2$,$f(v_1) = v_2$,$f(w_1) = w_2$.
- Rem : On a ainsi une unique homographie envoyant u sur 0, v sur 1, w sur ∞.
- Def : Pour a,b,c,d $\in P_1(\mathbb{C})$ distincts, on définit le birapport $[a,b,c,d] := f(d)$, où f est l'homographie envoyant (a,b,c) sur $(0,1,\infty)$.
- Pro : $[a,b,c,d] = \frac{d-a}{d-c} \cdot \frac{b-c}{b-a}$
- Ex : $[1,i,-i,-1] = 2$.
- Thm : Soit f une bijection de $P_1(\mathbb{C})$. f est une homographie ssi f préserve les birapports.
- Pro : 4 points de $P_1(\mathbb{C})$ sont cocycliques ou alignés ssi leur birapport est réel.
- **Dev** : Les homographies engendrées par les éléments de $Sl_2(\mathbb{Z})$ préservent le demi-plan de Poincaré $H := \{Im(z) > 0\}$. Pour $D := \{z \in H \text{ tq } |z| \geq 1, |Re(z)| < \frac{1}{2}\}$, $S :=$et $T :=$, on a les propriétés suivantes :
  i) L'orbite de tout élément de H par $< S,T >$ rencontre D.
  ii) Si $z \in \mathring{D}$ et $\gamma \in Sl_2(\mathbb{Z})$, $\gamma z \in D$ ssi $\gamma = \pm I_2$.
  iii) $Sl_2(\mathbb{Z}) =< S,T >$.

Références

Combes : Espace affine, applications affines, groupe affine. Groupe orthogonal, $Isom(E)$.
Eiden : Modélisation de $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{C}$, affixe, équations. Coordonnées polaires. Inversion analytique.
Audin : Homothéties affines, Th de Thalès, Th de Pappus. Angles orientés du plan, Th de l'angle inscrit. Construction de $P(E)$. Homographies.
Perrin : Propriétés du groupe orthogonal. Quaternions.
Caldero, Germoni : Construction de $P_1(\mathbb{C})$. Homographies. Quaternions, $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions.(Dev) Alessandrini : Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré.(Dev)
Rudin : Exponentielle complexe (rappels).

May 19, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes