Déf 1. [4](p.10) Partie dense

Prop 2. *[4](p.10) Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $]a, b[\cap A \neq \varnothing$.*

Déf 3. [4](p.10) Espace topologique séparé

I - Exemples de parties denses dans les espaces de dimension finie

1 - Dans $\mathbb{R}$

Ex 4. [4](p.10) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Ex 5. [4](p.197) Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

App 6. [4](p.197) Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$. $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

Déf 7. [3](p.46) Suite équirépartie

Théo 8. *[3](p.48) Critère de Weyl*

2 - Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Prop 9. *[5](p.185) L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Prop 10. *[5](p.183) L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

App 11. [5](p.187) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

App 12. [9](p.83) Soit $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors on a

$$D_X \det(H) = \operatorname{Tr}({}^t\operatorname{Com}(X)H).$$

Déf 13. [1](p.179) $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$

NB 14. [1](p.179)

$$\mathcal{C}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Prop 15. *[1](p.179) $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$ et donc $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont denses dans $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.*

App 16. [1](p.180) Soit ϕ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à M associe D la partie diagonalisable de la décomposition de Dunford. Alors si $n \geq 2$, l'application ϕ n'est pas continue.

II - Exemples de parties denses dans des espaces de dimension quelconque

1 - Prolongement de fonctions

Théo 17. *[7](p.60) Soit (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, F étant complet, A une partie dense de E et $f : A \to F$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application continue $g : E \to F$ qui prolonge f. De plus, g est uniformément continue.*

App 18 (Intégrale de Riemann des fonctions réglées)**.** [7](p.49) On définit par $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier et $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réglées. Soit

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\lambda_i \end{array}$$

où $(x_0, ..., x_n)$ est une subdivision adaptée à f et $f_{]x_i, x_{i+1}[} = \lambda_i$. Comme $\left|\left|\int_a^b f\right|\right| \leq (b - a)||f||_\infty$, la fonction ϕ est uniformément continue et on applique le théorème pour généraliser l'intégrale de Riemann aux fonctions réglées.

2 - Densité dans les espaces L^p

Déf 19. [10](p.80) Espaces L^p.

Théo 20. *[10](p.83) Soit S l'ensemble des fonctions étagées, mesurables, étagées, mesurables, à valeurs complexes, définies sur X telles que*

$$\mu(\{x, s(x) \neq 0\}) < \infty$$

Alors pour $1 \leq p < \infty$, S est dense dans $L^p(\mu)$.

Notation 21. [10](p.47) $\mathcal{C}_c(X)$

Théo 22. *[10](p.84) Pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $L^p(\mu)$.*

Théo 23. *[2](p.71) $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ est dense dans $L^p(\mu)$.*

Déf 24. [10](p.132) Coefficients de Fourier

App 25. [10](p.132) Lemme de Riemann-Lebesgue

3 - Stone Weierstrass et applications

Déf 26. [6](p.28) Une partie H de $\mathcal{C}(X)$ telle que pour tout $(x, y) \in X$ avec $x \neq y$, il existe $h \in H$ pour lequel $h(x) \neq h(y)$ est dite **séparante**.

Déf 27. [6](p.28) Une partie H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est dite **réticulée** si pour tout couple $(f, g) \in H$, $\sup(f, g) \in H$ et $\inf(f, g) \in H$.

Théo 28 (Stone-Weierstrass réel)**.** *[6](p.29)(Développement 2) Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.*

Cor 29 (Théorème de Weierstrass)**.** [4](p.224) Toute fonction continue $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions de polynômes.

Déf 30. [6](p.30) On dit que H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ est **auto-conjuguée** si pour tout $h \in H$, la fonction $\overline{h}$ définie par $\overline{h}(x) = \overline{h(x)}$ est un élément de H.

Théo 31 (Stone-Weierstrass complexe)**.** *[6](p.30) Toute sous-algèbre H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ séparante, auto-conjuguée et qui contient les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.*

Théo 32. *[4](p.224) Toute fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométrique.*

III - Bases hilbertiennes

1 - Espaces de Hilbert

Prop 33. *[1](p.100) Soit F un sous-espace vectoriel de H. Alors F est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.*

Déf 34. [1](p.107) Soit $(H, < .,. >)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une *base hilbertienne* de H si elle est :

(i) orthogonale : $< e_i, e_j >= 0$, pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$,

(ii) normée : $< e_i, e_i >= 1$ pour tout $i \in I$,

(iii) totale : $H = \overline{Vect(e_i, i \in I)}$.

Théo 35. *[1](p.109) Soit $(H, < .,. >)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) La famille orthonormée $(e_n)_n$ est une base hilbertienne.

(ii) Pour tout $x \in H$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} < x, e_n > e_n$, ce qui signifie $\lim_{N \to +\infty} \left|\left| x - \sum_{n=0}^{N} < x, e_n > e_n \right|\right| = 0$.

(iii) Pour tout $x \in H$, $||x||^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} | < x, e_n > |^2$.

(iv) On a $(e_n, n \in \mathbb{N})^{\perp} = \{0\}$.

De plus l'application

$$\begin{array}{rcl} \Delta : H & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ x & \longmapsto & (< x, e_n >)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

est bien définie et réalise une isométrie surjective de H sur $l^2(\mathbb{N})$.

2 - Polynômes orthogonaux

Déf 36. [1](p.110) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *fonction poids* une fonction $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty.$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue c'est-à-dire muni du produit scalaire :

$$< f, g >_{\rho} = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx.$$

L'espace $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert.

Déf 37. [1](p.110) Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg(P_n) = n$. Cette famille s'appelle la famille des *polynômes orthogonaux* associés à la fonction ρ.

Théo 38. *[1](p.112)[**Développement 1**] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$\int_I e^{\alpha |x|} \rho(x) dx < +\infty$$

alors la famille des polynômes $(\frac{P_n}{||P_n||_\rho})_{n\in\mathbb{N}}$ *forme une base hilbertienne de* $L^2(I,\rho)$ *pour la norme* $||.||_\rho$.

IV - Théorème de Baire

Rappel 39 (Théorème de Baire)**.** [8](p.193) Soit (E,d) un espace métrique complet. Alors

(i) Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'ouverts denses de E, $\bigcap_{n=1}^\infty O_n$ est encore dense dans E.

(ii) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fermés d'intérieur vide de E, $\bigcup_{n=1}^\infty F_n$ est encore d'intérieur vide dans E.

App 40. [4](p.404) Théorème de Banach-Steinhauss

App 41. [4](p.405) Existence de fonctions continues différentes de leur série de Fourier

Prop 42. *[8](p.263) L'ensemble* A *des fonctions continues sur* $[0,1]$ *qui ne sont dérivables en aucun point contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.*

Références

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* HK, 2005.

[2] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications.* Masson, 1987.

[3] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Hervé Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 2.* Cassini, 2004.

[4] Xavier Gourdon. *Les maths en tête Analyse.* Ellipses, 2008.

[5] Xavier Gourdon. *Les maths en tête Algèbre.* Ellipses, 2009.

[6] Francis Hirsch and Gilles Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle.* Dunod, 2009.

[7] Alain Pommelet. *Cours d'analyse.* Ellipses, 1994.

[8] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.

[9] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel.* Cassini, 2003.

[10] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Dunod, 2009.