Soit I un intervalle réel d'extrémités $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

I - Généralités sur la continuité et la dérivabilité

1 - Définitions et premières propriétés

Déf 1. [5] On dit que f est **continue** au point $\alpha \in I$ si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$. On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Théo 2. *[5] La fonction f est continue en $\alpha \in I$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers α, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\alpha)$.*

Ex 3. [5] La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ n'est pas continue en 0.

Théo 4. *[5] Si α est un réel adhérent à I n'appartenant pas I et si f a une limite l en α, il existe un unique prolongement de f à $I \cup \{\alpha\}$ qui est continu en α. Ce prolongement est défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $f(\alpha) = l$.*

Ex 5. [5] La fonction $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Déf 6. [1] Soit $a \in I$. On dit que f est **dérivable en** a si

$$\lim_{\substack{t\to a \\ t\in I\setminus\{a\}}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

existe.

NB 7. [1] Par récurrence, on peut définir la dérivée $n^{\text{ième}}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ si $f^{(n)}$ existe sur I et y est continue.

Prop 8 (Formule de Leibniz)**.** *[1] Soit f, g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$ tel que $f^{(n)}(a)$ et $g^{(n)}(a)$ existent. Alors le produit fg est n fois dérivable en a et*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

avec par convention $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$.

2 - Lien entre continuité et dérivabilité

Théo 9. *[5] Si f est dérivable en $a \in I$, elle est alors continue en ce point.*

NB 10. [5] La réciproque est fausse. En effet, il suffit de considérer la fonction $x \mapsto |x|$.

Ex 11. La fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\{2^n x\}}{2^n}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Rappel 12 (Théorème de Baire)**.** [4] Soit (E, d) un espace métrique complet. Alors

(i) Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'ouverts denses de E, $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ est encore dense dans E.

(ii) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fermés d'intérieur vide de E, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ est encore d'intérieur vide dans E.

Prop 13. *[4](**Développement 1**) L'ensemble A des fonctions continues sur $[0, 1]$ qui ne sont dérivables en aucun point contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.*

II - Théorèmes fondamentaux

1 - Théorème des valeurs intermédiaires

Théo 14. *Si $I = [a, b]$ avec $a < b$ et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]a; b[$.*

Théo 15. *[3][Darboux] Si f est dérivable sur I, alors $f'(I)$ est un intervalle.*

2 - Théorème de Rolle

Théo 16. *[1][Rolle] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application vérifiant*

(i) f est continue sur $[a,b]$.

(ii) f est dérivable sur $]a,b[$.

(iii) $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

App 17. [1] Si P est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, P' est également scindé.

NB 18. [5]

- Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas continue au bord. ($f(x) = 0$ sur $]0,1]$ et $f(0) = 1$)
- Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas dérivable sur $]a,b[$ tout entier ($f(x) = |x|$ sur $[-1,1]$).

3 - Théorème des accroissements finis

Théo 19 (Accroissements finis)**.** *[1] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Théo 20 (Accroissements finis généralisés)**.** *[1] Soit f, g deux applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Cor 21. [1][Règle de l'Hospital] Si $f(a) = g(a) = 0$ et si $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

App 22. [5] Si f est une fonction à valeurs réelles dérivable sur un intervalle réel I, alors f est croissante sur I si et seulement si, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

4 - Formules de Taylor

Théo 23 (Taylor-Young)**.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Soit $a \in I$ tel que $f^{(n+1)}(a)$ existe. Alors lorsque $h \to 0$, on a*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1}).$$

Théo 24 (Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a;b]$, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a;b[$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}_{\text{reste de Lagrange}}.$$

Théo 25. *[6](**Développement 2**) Soit $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose $c < d, f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite récurrente*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \phi(x_n) \text{ avec } \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Alors en notant a l'unique valeur d'annulation de la fonction f, on a :

(i) Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha] = I$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a de manière quadratique et il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a,

$$| x_{n+1} - a | \leq C | x_n - a |^2$$

(ii) Si, de plus, pour tout $x \in [a,d], f''(x) > 0$ alors pour tout $x_0 \in [a,d]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) et

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \\ x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ pour } x_0 > a. \end{cases}$$

Théo 26 (Taylor avec reste intégral)**.** *Soit $F : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a;b]$. Alors,*

$$F(b) = F(a) + (b-a)F'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} F^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)dt.$$

III - Suites de fonctions

1 - Régularité d'une limite de suite de fonctions

Théo 27. *[1] Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et (f_n) une suite de fonctions de E dans F. Si (f_n) converge uniformément sur E vers $f : E \to F$ et si toutes les fonctions (f_n) sont continues en $x_0 \in E$, alors f est continue en x_0.*

Théo 28. *[1] Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E. On suppose que*

(i) il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge

(ii) la suite de fonctions (f_n') converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g.

Alors (f_n') converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $f' = g$.

Cex 29. [2] On applique (f_n) la suite d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+n^2x^2}. \end{array}$$

Cette suite de fonctions est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ayant pour limite uniforme une fonction dérivable f et telle que la suite (f_n') converge vers une fonction $g \neq f'$.

App 30 (Weierstrass)**.** [1] Toute fonction continue $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

IV - Exemples

1 - Fonctions lipschitziennes et uniforme continuité

Déf 31. [1] Une application $f : (E, d) \to (E', d')$ est dite **uniformément continue** sur E si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in E, (d(x, y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Déf 32. Une application $f : (E, d) \to (E', d')$ est dite k**-lipschitzienne** si

$$\forall x, y \in E, d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Prop 33. *Une fonction k-lipschtzienne est uniformément continue.*

2 - Fonctions convexes

Déf 34. [1] Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **convexe** si

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Prop 35. *[1] Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est convexe

(ii) f' est croissante

(iii) La courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

App 36 (Inégalité arithmético-géométrique)**.** [1] Soit $x_1, ..., x_n$ des nombres réels positifs. On a

$$(x_1 ... x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + ... x_n}{n}.$$

App 37 (Inégalité de Holder)**.** [1] Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$ et $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Références

[1] Xavier Gourdon. *Les maths en tête Analyse*. Ellipses, 2008.

[2] Bertrand Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques*. Ellipses, 2007.

[3] Alain Pommelet. *Cours d'analyse*. Ellipses, 1994.

[4] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2007.

[5] Jean-Etienne Rombaldi. *Eléments d'analyse réelle*. EDP Sciences, 2004.

[6] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel*. Cassini, 2003.