

I - Distance dans les espaces euclidiens

1) Distance : def espaces euclidiens, distance, Cauchy-Schwarz, théorème de Pythagore, orthogonalité, projections orthogonales, exemples [Aud06]

2) Matrices et déterminants de Gram : def matrices de Gram, carac comme matrices hermitiennes positives, lien distance et det de Gram, projections, inégalité d'Hadamard [Gou09], [BMP04]

II - Isométries vectorielles

1) Le groupe orthogonal : def isométries, structure de groupe, compacité, caractérisation matricielle, via les bases orthonormées, det, indice 2, dev 1 [Rom21]

2) Réduction : $\text{Sp} \subset \mathbb{U}$, symétries orthogonales et réflexions, réduction, composantes connexes, tout $u \in O(E)$ est produit de $\leq n$ réflexions [Rom21]

3) Description de $O_2(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$: réduction dans $O_2(\mathbb{R}), O_3(\mathbb{R})$, description géométrique, app : dev 2 [Gri18]

III - Isométries affines

1) Le groupe des isométries affines : def, structure de groupe, les isométries sont affines, stabilité de l'orthogonal, def réflexion affine, décomposition en $\leq n + 1$ réflexions affines, déterminant, forme réduite, exemples [Aud06]

2) Classification en dimensions 2 et 3 : se ramener au cas vectoriel, condition unique pt fixe, classification dim 2, classification dim 3 [Aud06]

3) Isométries préservant une partie : structure de sous-groupe, isométries préservent isobarycentre et points extrémaux, groupes d'isométries de polygones, des triangles, du tétraèdre, du cube, du dodécaèdre [Rom21], [CG17]

Leçon 161

Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens :
distances, isométries.

I - Distance dans les espaces euclidiens

II - Isométries vectorielles

III - Isométries affines

Dev 1 : Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

Dev 2 : Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

Références

- [Aud06] Michèle AUDIN. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.
- [BMP04] Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation : Mathématiques*. H&K, 2004.
- [CG17] Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*. Calvage & Mounet, 2017.
- [Gou09] Xavier GOURDON. *Les maths en tête : Algèbre : Mathématiques pour MP**. Ellipses, 2009.
- [Gri18] J. GRIFONE. *Algèbre Lineéaire*. Cépaduès-Editions, 2018.
- [Rom21] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck supérieur, 2021.