

Leçon 246

Séries de Fourier. Exemples et applications.

I - Coefficients et séries de Fourier

II - Convergence des séries de Fourier

III - Applications

Dev 1 : Calcul des $\zeta(2k)$

Dev 2 : Équation de la chaleur

I - Coefficients et séries de Fourier

1) Espaces de fonctions 2π -périodiques : $\mathcal{C}_{\infty} \subset L^\infty \subset L^p \subset L^1$, densité, Riesz-Fischer, def ps L^2 , L^2 Hilbert, convolution $L^1 - L^1$ [E1 08]

2) Coefficients et séries de Fourier : def, règles de calcul, Riemann-Lebesgues, ordre de grandeur, def série de Fourier, rq convergence, exemples [E1 08]

II - Convergence des séries de Fourier

1) Convergence au sens de Cesàro : CV Cesàro, $S_N(f)$ CV $\Rightarrow \sigma_N(f)$ CV (ponctuelle/ L^p), def noyau de Dirichlet, de Fejér, prop, thm de Fejér, thm de Weierstrass, injectivité de $f \mapsto (c_n(f))$ [E1 08]

2) Convergences L^1 et L^2 : $\sum u_n e_n \rightarrow f$ (L^1 ou $\|\cdot\|_\infty$) $\Rightarrow u_n = c_n(f)$, (e_n) base hilbertienne, Bessel, Parseval, Plancherel, exemples [E1 08]

3) Convergence ponctuelle et uniforme : principe de localisation, rq comportement local, si $S_N(f)$ CV en x c'est vers $f(x)$, thm de Dirichlet, vitesse de CV, ex et contre-exemples [E1 08]

III - Applications

1) Calcul de sommes : calcul de différentes séries [E1 11], série de Fourier de $e^{\frac{zx}{2\pi}}$, DSE de $\frac{z}{e^z-1}$, dev 1 [FGN09]

2) Traitement du signal : formule de Poisson, échantillonnage de Shannon, principe d'incertitude, interprétations [Ber24]

3) Équation de la chaleur : dev 2

Références

- [Ber24] Julien BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de Mathématiques : 40 développements*. Ellipses, 2024.
- [El 08] Mohammed EL AMRANI. *Analyse de fourier dans les espaces fonctionnels niveau M1*. Ellipses, 2008.
- [El 11] Mohammed EL AMRANI. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 2011.
- [FGN09] Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Analyse : Tome 2, 2e édition*. Cassini, 2009.