

Leçon 208

Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

I - Espaces vectoriels normés

II - Cas de la dimension finie

III - Espaces vectoriels normés complets

Dev 1 : Théorème de Grothendieck

Dev 2 : Projection sur un convexe fermé

I - Espaces vectoriels normés

1) Norme : def, exemples, distance, convexité des boules, jauge de Minkowski [Sai08], [Rou15]

2) Continuité des applications linéaires : définitions, norme subordonnée, props, formes linéaires, Hahn-Banach, exemples [Sai08]

II - Cas de la dimension finie

1) Equivalence des normes : compacité boule/sphère $\|\cdot\|_\infty$, équivalence des normes, continuité de toutes les AL [Rom23], [Mar+09]

2) Théorème de Riesz : thm de Riesz, dim finie ssi boule compact, description compacts, sev propres d'un opérateur compact [Mar+09]

3) Exemples de normes matricielles : différentes normes $\|\cdot\|_{p,q}$, def rayon spectral, équivalences [Rou15]

III - Espaces vectoriels normés complets

1) Espaces de Banach : def, critère via les séries, Banach-Steinhaus, $\mathcal{L}(E, F)$ reste un Banach, théorème de Baire, graphe fermé, [dev 1] [Sai08], [Mar+09]

2) Espaces de Hilbert : def, exemples, bases hilbertiennes, projection sur un convexe fermé, compacité faible, [dev 2] [Rom24]

Références

- [Mar+09] Jean-Pierre MARCO, Hakim BOUMAZA, Marie DELLINGER et Laurent LAZZARINI. *Mathématiques L3, analyse cours complet avec 600 tests et exercices corrigés*. Pearson Education, 2009.
- [Rom23] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités*. De Boeck supérieur, 2023.
- [Rom24] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation Externe : Analyse*. De Boeck supérieur, 2024.
- [Rou15] François ROUVIÈRE. *Petit Guide de Calcul Différentiel : A l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2015.
- [Sai08] Jean SAINT RAYMOND. *Topologie, Calcul Différentiel et variable complexe : Cours et exercices*. Calvage & Mounet, 2008.