

Leçon 219

Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

I - Cadres d'existence d'extremums

II - Caractérisations pour les fonctions régulières

III - Méthodes numériques d'optimisation

Dev 1 : Point de Fermat d'un triangle

Dev 2 : Extrema liés

I - Cadres d'existence d'extremums

1) Continuité sur un compact : théorème de compacité, des bornes atteintes, distance entre deux compacts, $\exists!$ min pour $f \in \mathcal{C}^0$ coercive sur un fermé, théorème de point fixe [Gou08]

2) Convexité : min local=global, $\{\text{min}\}$ =convexe, stricte convexité $\Rightarrow$ unicité, cas de det, ellipsoïde de John-Loewner, rq : + de résultats avec convexe et Hilbert, exemples et contre-exemples [BMP04]

3) Espaces de Hilbert : projection sur un convexe fermé, théorème de Riesz, def convergence faible, extraction faible, existence de min pour les fcts convexes, α -convexes, exemples [Rom24], [All05]

4) Principe du maximum : formule de Cauchy, inégalité de Cauchy, principe du maximum local puis global, théorème de d'Alembert-Gauss, cas des fonctions harmoniques [Rom24]

II - Caractérisations pour les fonctions régulières

1) Fonctions $\mathcal{C}^1$: cas dérivable à gauche/droite, cas dérivable, théorème de Darboux, contre-ex réciproque, cas dim supérieure, théorème de Rolle, TAF, théorème de Sard [BMP04]

2) Fonctions $\mathcal{C}^2$: conditions, dimension supérieure, lien vp Hessienne, [dev 1], exemples [BMP04], [Rom24]

3) Optimisation sous contrainte : différentes defs, exemples, [dev 2], interprétation, applications : IAG, Hadamard, thm spectral, min de la norme sur $SL_n(\mathbb{R})$ [Laf23], [Rou15]

III - Méthodes numériques d'optimisation

1) Méthode de Newton : explication, méthode de Newton, vitesse de CV, exemple [Rou15]

2) Descente de gradient : explication, méthode du gradient, vitesse de CV, exemple [BMP04], [Les+20]

Références

- [All05] Grégoire ALLAIRE. *Analyse numérique et optimisation*. Editions de l'Ecole polytechnique, 2005.
- [BMP04] Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation : Mathématiques*. H&K, 2004.
- [Gou08] Xavier GOURDON. *Les maths en tête : Analyse : Mathématiques pour MP**. Ellipses, 2008.
- [Laf23] J. LAFONTAINE. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP sciences, 2023.
- [Les+20] Didier LESESVRE, Pierre MONTAGNON, Pierre LE BARBENCHON et Théo PIERRON. *131 développements pour l'oral : Agrégation externe mathématiques-informatique*. Dunod, 2020.
- [Rom24] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation Externe : Analyse*. De Boeck supérieur, 2024.
- [Rou15] François ROUVIÈRE. *Petit Guide de Calcul Différentiel : A l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2015.