Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I - Généralités

1 - Définitions et premières propriétés

Déf 1. [1] Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'espace H est dit **préhilbertien** s'il est muni d'un produit scalaire (produit scalaire hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Si un espace préhilbertien est complet pour la norme associée au produit scalaire, on dit que c'est un **espace de Hilbert**.

NB 2. [1] Un sous-espace fermé d'un espace complet est un espace complet. Muni de la restriction du produit scalaire un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert admet aussi une structure d'espace de Hilbert.

Ex 3. [1] L'ensemble des suites de nombres complexes de carré sommables

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire hermitien

$$\forall x, y \in l^2(\mathbb{N}), < x, y >= \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$$

forme un espace de Hilbert.

Ex 4. [2] $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$$

est un espace de Hilbert.

Théo 5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *[1] Soit $(H, < ., . >)$ un espace préhilbertien. On a, pour tout $x, y \in H$, $| < x, y > | \leq ||x||||y||$.*

App 6. [1] Soit $y \in H$. Alors la forme linéaire $< ., y >$ est continue et de norme $||y||$.

Théo 7 (Identité du parallélogramme)**.** *[1] Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Supposons que E soit un espace préhilbertien, alors, pour tout $x, y \in E$, $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.*

NB 8. [1] La réciproque est aussi vraie. Les espaces hilbertiens sont ainsi les seuls espaces pour lesquels la norme vérifie l'identité du parallélogramme.

2 - Théorème de projection

Théo 9 (Projection sur un convexe fermé)**.** *[1](**Développement 1**) Soit $(H, < ., . >)$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé (non vide) de H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique élément de C, qui réalise la distance de x à C. Ce point est appelé la **projection de** x **sur** C et il est noté $p_C(x)$. On a ainsi pour tout $y \in C, ||x - p_C(x)|| \leq ||x - y||$. Par ailleurs, on a*

(i) $p_C(x) \in C$

(ii) $Re(< x - p_C(x), y - p_C(x) >) \leq 0$, pour tout $y \in C$.

App 10. [1] Soit C un convexe fermé (non vide) de H, l'application $p_C : x \mapsto p_C(x)$ est bien définie. Elle est aussi 1-lipschitzienne et donc continue.

Déf 11. [1] Soit $(H, < ., . >)$ un espace préhilbertien et A une partie de H. L'**orthogonal** de A est $A^\perp = \{y \in H, \forall x \in A, < x, y >= 0\}$.

Prop 12. *[1]*

- *$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.*
- *$A^\perp = (Vect(A))^\perp$ et $A^\perp = (\overline{A})^\perp$.*
- *$A^{\perp\perp} = \overline{Vect(A)}$.*

Théo 13 (Projection sur un sous-espace fermé). *[1] Soit $(H, <.,.>)$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé e H. Pour $x \in H$, le projeté $p_F(x)$ de x sur F est l'unique élément $p \in H$ et $x - p \in F^\perp$. De plus, l'application p_F est linéaire, continue et surjective. L'espace H se décompose en la somme directe orthogonale $H = F \oplus F^\perp$ et p_F est le projecteur associé à cette décomposition. Enfin, pour trois éléments x, x_1 et x_2 de H, les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $x = x_1 + x_2$ *avec* $x_1 \in F$ *et* $x_2 \in F^\perp$

(ii) $x_1 = p_F(x)$ *et* $x_2 = p_{F^\perp}(x)$.

App 14. [1] Soit F un sous-espace vectoriel de H. Alors F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

3 - Bases hilbertiennes

Déf 15. [1] Soit $(H, <.,.>)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une *base hilbertienne* de H si elle est :

(i) orthogonale : $<e_i, e_j>= 0$, pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$,

(ii) normée : $<e_i, e_i>= 1$ pour tout $i \in I$,

(iii) totale : $H = \overline{Vect(e_i, i \in I)}$.

NB 16. [1] Sur une base algébrique $(e_i)_{i\in I}$, un élément se décompose en une combinaison linéaire finie des (e_i).

Théo 17. *(i) Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.*

(ii) Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.

Théo 18. *Soit $(H, <.,.>)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) La famille orthonormée $(e_n)_n$ est une base hilbertienne.

(ii) Pour tout $x \in H$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} <x, e_n> e_n$, ce qui signifie $\lim_{N\to+\infty} \left\|x - \sum_{n=0}^{N} <x, e_n> e_n\right\| = 0$.

(iii) Pour tout $x \in H$, $||x||^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |<x, e_n>|^2$.

(iv) On a $(e_n, n \in \mathbb{N})^\perp = \{0\}$.

De plus l'application

$$\begin{aligned} \Delta : H &\longrightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ x &\longmapsto (<x, e_n>)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

est bien définie et réalise une isométrie surjective de H sur $l^2(\mathbb{N})$.

Déf 19. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *fonction poids* une fonction $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty.$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue c'est-à-dire muni du produit scalaire :

$$<f, g>_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx.$$

L'espace $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert.

Déf 20. Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg(P_n) = n$. Cette famille s'appelle la famille des *polynômes orthogonaux* associés à la fonction ρ.

Théo 21 (**Développement 2**). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$$

alors la famille des polynômes $(\frac{P_n}{||P_n||_\rho})_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour la norme $||.||_\rho$.

II - Théorème de Riesz

Soit $(H, <.,.>)$ un espace de Hilbert.

1 - Dual d'un espace de Hilbert

Théo 22 (Riesz). *[3] L'application de H dans H' définie par $y \mapsto \phi_y =< .,y >$ est une isométrie surjective. Ainsi, pour toute forme linéaire continue ϕ sur H, il existe un unique $y \in H$ tel que $\forall x \in E, \phi(x) =< x, y >$ et $||\phi|| = ||y||$.*

NB 23. On peut identifier H et son dual.

App 24. [3] Pour tout $T \in L(H)$ application linéaire continue de H, il existe un unique opérateur $T^* \in L(H)$ tel que, pour tout $x, y \in H$, $< Tx, y >=< x, T^*y >$. L'opérateur T^* est appelé l'**adjoint** de T. De plus, $||T^*|| = ||T||$.

2 - Applications du théorème

Théo 25 (Hahn-Banach analytique). *[1] Soit F un sous-espace vectoriel normé de H et $f \in F'$. Alors il existe $\overline{f} \in H'$ telle que $\overline{f}_{|F} = f$ et $||f||_{F'} = ||\overline{f}||_{H'}$.*

Déf 26. [2] On dit qu'une forme bilinéaire $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est **coercive** s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $a(u, v) \geq \alpha|v|^2$ pour tout $v \in H$.

Théo 27 (Stampacchia). *[2] Soit a une forme bilinéaire continue et coercive. Soit K un convexe, fermé non vide. Etant donné $\phi \in H'$, il existe $u \in K$ unique tel que $a(u, v - u) \geq< \phi, v - u >$, pour tout $v \in K$.*
De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par

(i) $u \in K$

(ii) $\frac{1}{2}a(u, u)- < \phi, u >= \min_{v \in K} \left\{\frac{1}{2}a(v, v)- < \phi, v >\right\}$.

3 - Convergence faible dans un espace de Hilbert

Déf 28. [3] On dit qu'une suite (x_n) de H **converge faiblement** vers $x \in H$ si pour tout $y \in H$, $\lim_{n\to\infty} < x_n, y >=< x, y >$.

Théo 29. *[3] De toute suite bornée de H, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

III - Application aux séries de Fourier

On définit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On considère l'espace $L^p(\mathbb{T})$ muni, pour $1 \leq p < \infty$, de la norme

$$||f||_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

et si $p = \infty$ de la norme

$$||f||_\infty = \inf\{M, |f(x)| \leq M p.p, x \in \mathbb{T}\}.$$

NB 30. [1] Comme $\mathbb{T}$ est de mesure finie, $L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ pour $1 \leq p \leq \infty$. Comme $\mathbb{T}$ est compact, on a $\mathcal{C}(\mathbb{T}) \subset L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$.

Déf 31. [1] Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n la fonction continue 2π-périodique définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e_n(x) = e^{inx}$.

Déf 32. [1] On définit les **coefficients de Fourier** pour $f \in L^1(\mathbb{T})$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{e_n(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

Prop 33. *[1] $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire*

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

est un espace de Hilbert.

NB 34. Les coefficients de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{T})$ s'expriment comme les produits scalaires $c_n(f) =< f, e_n >$.

Références

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*. HK, 2005.

[2] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications*. Masson, 1987.

[3] Francis Hirsch and Gilles Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2009.