

Leçon 158

Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

I - Espaces euclidiens

II - Endomorphismes orthogonaux

III - Endomorphismes symétriques

Dev 1 : Réduction des endomorphismes normaux

Dev 2 : Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

I - Espaces euclidiens

1) Définition et propriétés : def, Cauchy-Schwarz, polarisation, def orthogonalité, thm de Pythagore, Gram-Schmidt, projection orthogonale, $E = F \oplus F^\perp$ [Rom21]

2) Adjoint d'un endomorphisme : def, représentation matricielle, règles de calcul, exemples [Rom21]

3) Endomorphismes normaux : def, orthogonal reste stable par u normal, existence plan/droite stable, [dev 1], versions matricielles, cas anti-symétrique [Rom21]

II - Endomorphismes orthogonaux

1) Le groupe orthogonal : def isométries, structure de groupe, compacité, caractérisation matricielle, via les bases orthonormées, det, indice 2 [Rom21]

2) Réduction : $Sp \subset \mathbb{U}$, symétries orthogonales et réflexions, réduction, composantes connexes, tout $u \in O(E)$ est produit de $\leq n$ réflexions [Rom21]

3) Description de $O_2(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$: réduction dans $O_2(\mathbb{R}), O_3(\mathbb{R})$, description géométrique, app : [dev 2][Gri18]

III - Endomorphismes symétriques

1) Définition et réduction : def, représentation matricielle, ev de dim $\frac{n(n-1)}{2}$, vp réelles, théorème spectral, réduction simultanée [Rom21], [Gou21]

2) $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$: def, critère via vp, via les mineurs principaux, S_n^{++} ouvert, exemples [Rom21]

3) Décomposition polaire : existence de racines, décomposition polaire, homeo, def rayon spectral, lien norme triple, maximalité de $O_n(R)$ [Rom21], [CG17]

Références

- [CG17] Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*. Calvage & Mounet, 2017.
- [Gou21] Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. ELIPSES, 2021.
- [Gri18] J. GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. Cépaduès-Editions, 2018.
- [Rom21] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck supérieur, 2021.