

Leçon 243

Séries entières, propriétés de la somme.
Exemples et applications.

I - Séries entières

II - Propriétés de la somme

III - Applications

Dev 1 : Calcul des $\zeta(2k)$

Dev 2 : Indécomposabilité de la loi de Poisson

I - Séries entières

1) Rayon de convergence : def série entière, rayon de CV, cercle d'incertitude, règle de d'Alembert, de Cauchy, formule de Hadamard, comparaison, exemples et contre-exemples [El 11]

2) Opérations sur les séries entières : somme, produit, rayons, def et rayon série dérivée, exemples [El 11]

3) Convergence sur le disque de convergence : CVN sur tout compact dans le disque, CVU sur le disque, cas $R = +\infty$, contre-exemple [El 11]

II - Propriétés de la somme

1) Régularité : continuité, intégration de la somme, primitives, dérivabilité, développement limité, exemples [El 11]

2) Fonctions développable en série entière : def, régularité et DL, lien parité, condition via le reste, lien Taylor-Lagrange, somme/produit/dérivée/primitives de DSE [El 11]

3) Fonctions analytiques : def, formule de Cauchy, théorème de Liouville, principe des zéros isolés, du maximum, exemples [Rom23]

III - Applications

1) Calcul de séries numériques : [dev 1], applications, calcul de quelques séries via les séries entières [Rom23], [FGN09]

2) Résolution d'équations différentielles : méthode, def point singulier, existence de solution DSE en un point singulier, exemples [El 11], [Ber17]

3) Fonctions génératrices : def, récupération de la loi, des moments, exemples, cas d'une somme, [dev 2], processus de Galton-Watson [App24]

4) Dénombrement : nombre de dérangements, nombres de Catalan, nombres de Bell [FGN07]

Références

- [App24] Walter APPEL. *Mathématiques pour l'agrégation Externe*. De Boeck supérieur, 2024.
- [Ber17] Florent BERTHELIN. *Equations différentielles*. Cassini, 2017.
- [El 11] Mohammed EL AMRANI. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 2011.
- [FGN07] Serge FRANCINOUE, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Oraux X/ENS Algèbre 1*. Cassini, 2007.
- [FGN09] Serge FRANCINOUE, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Analyse : Tome 2, 2e édition*. Cassini, 2009.
- [Rom23] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités*. De Boeck supérieur, 2023.