

239: Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.

Ex. et appli

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. I intervalle de $\mathbb{R}$ $f: I \times X \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Régularité des intégrales à paramètres

a) Continuité.

Thm. 1: (Convergence dominée) Soit (f_n) une suite de fonction intégrable tq (f_n) converge p.p. et il existe g intégrable tel que $\forall n \in \mathbb{N} |f_n| \leq g$ p.p. Alors il existe $f \in \mathcal{I}^1(\mathbb{K})$ tq $f_n \xrightarrow{p.p.} f$ et $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Thm. 2: (Continuité sous le signe intégrale). Si:

- Pour $u \in I$, $x \mapsto f(u, x)$ est mesurable
- Pour presque tout $x \in X$, $u \mapsto f(u, x)$ est continue en u .
- Il existe $g \in \mathcal{I}^1(\mathbb{K})$ tq pour tout $u \in I$ et presque tout $x \in X$ on a: $|f(u, x)| \leq g(x)$.

Alors, $F(u) = \int f(u, x) d\mu(x)$ est continue en u (et est définie pour tout u)

Ex. 3: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \cos^n(x) = 0$

Appl. 4: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $u \mapsto F(u) := \int_a^u f(x) dx$ où $a \in \mathbb{K} \setminus \{-\infty\}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Dérivabilité

Thm. 5: (Dérivation sous le signe intégrale) Si f vérifie:

- Pour tout $u \in I$ $x \mapsto f(u, x)$ est intégrable
- $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(u, x)$ existe pour presque tout x .
- Il existe $g \in \mathcal{I}^1(\mathbb{K})$ tq pour tout $u \in I$ et pour presque tout $x \in X$ $|\frac{\partial f}{\partial u}(u, x)| \leq g(x)$

Alors, $F(u) = \int f(u, x) d\mu(x)$ est définie et dérivable sur I et

$$F'(u) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) d\mu(x)$$

Ex. 6: $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Rmq. 7: Ce résultat généralise pour F et x^k $k \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$

c) Holomorphie π ouvert de $\mathbb{C}$, $f: \pi \times X \rightarrow \mathbb{C}$

Thm. 8: (Holomorphie sous le signe intégrale) Si:

- Pour $z \in \pi$ fixé, $t \mapsto f(z, t)$ est intégrable.
- Pour presque tout $t \in X$, $z \mapsto f(z, t) \in \mathcal{H}(\pi)$.
- Pour tout compact $K \subset \pi$, il existe g intégrable tq $|f(z, t)| \leq g(t)$ pour presque tout t .

Alors $F(z) = \int_X f(z, t) d\mu(t) \in \mathcal{H}(\pi)$ et $F'(z) = \int \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) d\mu(t)$

Ex. 9: Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$

d) Comportement asymptotique

Thm. 10: Soit $I, a, b \subset \mathbb{R}$ intervalle semi ouvert de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b \leq +\infty$) Soient

$f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurables

(i) Si $\int_a^b g$ diverge alors lorsque $x \rightarrow b^-$:

- Si $f = O(g)$ alors $\int_a^x f = O \int_a^x g$.
- Si $f = o(g)$ alors $\int_a^x f = o \int_a^x g$.
- Si $f \sim g$ alors $\int_a^x f \sim \int_a^x g$.

(ii) Si $\int_a^b g$ converge alors lorsque $x \rightarrow b^-$:

- Si $f = O(g)$ alors $\int_a^x f = O \int_a^x g$.
- Si $f = o(g)$ alors $\int_a^x f = o \int_a^x g$.
- Si $f \sim g$ alors $\int_a^x f \sim \int_a^x g$.

Ex. 11: $\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = o \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = o(x^{-1})$

II. Convolution et transformée de Fourier

a) Le produit de convolution

Def. 12: Le produit de convolution de deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ est formellement $f * g$ où $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$, $x \in \mathbb{R}$.

Prop. 13: Le produit de convolution a un sens dans les cas suivants:

- $f, g \in \mathcal{L}^1$ alors $f * g \in \mathcal{L}^1$. De plus $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
- $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $g \in \mathcal{L}^1$ alors $f * g \in \mathcal{L}^\infty$. De plus $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$
- f bornée sur tout compact, $g \in \mathcal{L}^1$ alors $f * g$ est bien définie

Def. 14: Pour $a \in \mathbb{R}$ on définit pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, $Z_a(f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$
 $x \mapsto f(x-a)$

[2065]
p.164
ou
[2065]
p.314

[2065]
p.318

[2065]
p.163

[2065]
p.329
-325

CBRTS
p.292
-293

[Z0]
p.325
-326

p.329
[Z00]
p.300

[Z00]
p.302
-303

[Z00]
p.307

Thm.15: Soit $0 \in \mathbb{R}$. Prenons $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables tq $f = g$ p.p alors $\int f = \int g$ p.p.

Cor.16: $p \in L^1, +\infty L^1, f \in L^1, a \mapsto \int_a^\infty f$ est uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Thm.17: Pour $k \in \mathbb{N}$. Soit $f \in C^k(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ à support compact. Alors $f * g \in C^k(\mathbb{R})$ et $\frac{\partial^k}{\partial x^k} f * g = \frac{\partial^k f}{\partial x^k} * g$. $i \in \{1, \dots, k\}$.

Prop.18: Soient f, g tq $f * g$ soit défini. Si f et g sont à support compact alors $f * g$ l'est aussi.

Thm.19: ($L^1 \times L^1$) Soient $f \in L^1, g \in L^1$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\alpha \mapsto f * g(\alpha)$ est uniformément continue et bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$.

Thm.20: Le $\mathbb{R}$ -ev ($L^1, +, \cdot$) muni de $*$ est un $\mathbb{R}$ -algèbre commutative ne possédant pas d'unité.

b) Approximation de l'unité

Def.21: Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de L^1 et dite approximation de l'unité si:

- (i) $\forall n \geq 1, \int_{\mathbb{R}} \alpha_n = 1$
- (ii) $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}} |\alpha_n| < \infty$
- (iii) $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \varepsilon} |\alpha_n(x)| = 0$

Rmq.22: Plutôt que des suites on considère des familles $(\alpha_t)_{t > 0}$ indexées par $\mathbb{R}^+$. On adapte alors le point (iii) en: $t \rightarrow 0$

Ex.23: Noyau de Gauss $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}t} e^{-\frac{x^2}{2t}} \right)_{t > 0}$

Prop.24: Pour toute α intégrable d'intégrale $\int \alpha = 1, \alpha_t = \frac{1}{t} \alpha\left(\frac{x}{t}\right)$ est une approximation de l'unité. En particulier pour α continue à support compact d'intégrale valant 1.

Thm.25: Soit (α_n) suite d'approximation de l'unité. Pour $p \in C^1, +\infty L^1$ $\forall n \geq 1, f * \alpha_n \in L^p$ et $f * \alpha_n \xrightarrow{L^p} f$

Def.26: On dit que (α_n) est régularisante si (α_n) est une approximation de l'unité et $\forall n \geq 1, \alpha_n$ est ∞ à support compact.

Lemme.27: Il existe $p \in C^\infty$ tq: $p \geq 0, \text{supp } p \subset \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$ et

$\int_{\mathbb{R}} p = 1$

Ex.28: $p_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. $p(x) = \frac{p_0(x)}{\int p_0 dx}$ convient.

Thm.29: Soit K un compact de $\mathbb{R}, \mathcal{U}$ un voisinage ouvert de K . Il existe $\theta \in C^\infty$ à support compact, $\theta(x) = 1$ sur $K, \theta(x) = 0$ sur $\mathcal{U}^c$ et $0 \leq \theta \leq 1$ sur $\mathcal{U}$.

Notation 20: Pour un p comme dans le lemme 27 on définit $p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ($\varepsilon > 0$)

Prop.31: (p_ε) est une suite régularisante.

Lemme 32: $1 \leq p < \infty, L^p$ est dense dans L^1

Lemme 33: Si $f \in L^p$ alors $p_\varepsilon * f \xrightarrow{L^p} f$ ($p \in C^1, +\infty L^1$)

Thm.34: Pour $p \in C^1, +\infty L^1, L^p$ est dense dans L^1 .

c) Transformée de Fourier dans L^1

Def.35: Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit la transformée de Fourier de f (lorsque cela a un sens) par:

$$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i x \xi} dx$$

Lemme 36: (Riemann-Lebesgue) Pour $f \in L^1, \hat{f}$ existe et $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Thm.1/Def.37: Pour $f \in L^1, \hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$. $\hat{f}$ qui a une note aussi $\mathcal{F}(f)$ est appelée transformée de Fourier de f et l'application:

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$$

est linéaire continue.

Def.38: On définit $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i x \xi} dx$ où $f \in L^1$

Ex.33: $\mathcal{F}\left(x \mapsto \frac{1}{2} e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2}$

Prop.40: Pour $f, g \in L^1, \widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$

Thm.41: (Formule de dualité) Pour $f, g \in L^1$ on a $\int \hat{f} \hat{g} = \int f g$.

Thm.42: La transformée de Fourier dans L^1 est injective.

Thm.43: (Formule d'inversion) Si $f \in L^1$ et $\hat{f} \in L^1$ alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i x \xi} d\xi$$

III. Applications

a) Analyse complexe $\mathbb{R}$ ouvert de $\mathbb{C}$

Def.44: Soit γ une courbe fermée, $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. On appelle indice de a par rapport à γ la quantité $\text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz$.

Thm.45: L'indice a les propriétés:

- (i) $\text{Ind}_\gamma(a) \in \mathbb{Z}$
- (ii) Ind_γ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$
- (iii) Ind_γ est nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

[Z00]
p.327
-332

DEV

[Z00]
p.110
-116

DEV

[Z00]
p.92

Thm. 46: (formule de Cauchy) Soit γ un cycle tq pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$.

Alors pour $f \in H(\mathbb{R})$ et $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^*$ on a:

$$\text{Ind}_{\gamma}(z_0) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Thm. 47: (théorème des résidus) Soit f méromorphe sur $\mathbb{R}$. Soit A l'ensemble des pôles de f et γ un cycle dans $\mathbb{R}$ tq $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$ et γ ne rencontre pas A , on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{a \in A} \text{Ind}_{\gamma}(a) \text{Res}(f, a)$$

Ex. 48: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n} dt = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{n})}$ $n \in \mathbb{N}^*$

b) Probabilités: $(X_n)_n$ suite de v.a réelles et x v.a réelle

Def. 49: On dit que (X_n) cv en loi vers X , si pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(X_n)) = E(f(X))$$

Def. 50: On appelle fonction caractéristique de X , la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_X: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto E(e^{itX}) \end{aligned}$$

Prop. 51: Soient $a, \lambda > 0$, considérons la densité $\gamma_{a,\lambda}: a \mapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}$ de la loi $\Gamma(a, \lambda)$

• la fonction caractéristique de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est:

$$\varphi_{a,\lambda}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^a \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

• $\forall n \in \mathbb{N}$, la loi $\Gamma(a, \lambda)$ admet un moment d'ordre n :

$$\frac{a(a+1)\dots(a+n)}{\lambda^n}$$

Prop. 52: $X_n \xrightarrow{L} X$ si pour toute $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ $E(f(X_n)) \rightarrow E(f(X))$

Thm. 53: (Levy) $X_n \xrightarrow{L} X$ si $\varphi_{X_n} \rightarrow \varphi_X$ simplement.

Thm. 54: (théorème central limite). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, (X_n) iid dans L^2 .

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

où $\mu = E(X_1)$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$.

Références:

EBRIS: Briane, Payès, théorie intégrale

CDARS: Dautzen, Analyse pour ingénieurs

COUES: Queffelec, Analyse complexe

LEA3: Zwilly - Queffelec, Analyse pour ingénieurs

LG003: Gaudin, Analyse 3e d.

ELAMS: El Amrani, Analyse de Fourier.

DEV. 4

Commentaires:

- Pour montrer holomorphie sans / on a besoin de la formule de Cauchy ou en cercle. Pour la présentation voir III a)
Dire un truc du genre "je rappelle des résultats d'analyse complexe comme ---, qui permettent de donner des méthodes efficaces pour le calcul d'intégrale à paramètres."