Déf 1. Soit E et F deux ensembles. $A \subset E$. On dit que $g : E \to F$ est un **prolongement** de $f : A \to F$ si $\forall x \in A, f(x) = g(x)$.

I - Aspects topologiques

1 - Prolongement ponctuel

Déf 2. [2] Soit (E,d) et (F,d') deux espaces métriques. Soit $f : D \subset (E,d) \to (F,d')$ et $a \in D$ un point d'accumulation de D. Si f n'est pas définie en a et si $\underset{x\to a x\neq a}{f}(x) = l$, la fonction g définie sur $D \cup \{a\}$ par $g(x) = f(x)$ sur D et $g(a) = l$ est continue en a et est appelée **prolongement par continuité de f en** a.

Ex 3. La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ se prolonge par continuité en 0 en une fonction g en posant $g(0) = 1$.

2 - Un théorème de prolongement global

Théo 4 (Tietze). *[4](Développement 1) Soit (X,d) un espace métrique, Y un fermé de X, $g_0 : Y \to \mathbb{R}$ continue alors g_0 admet un prolongement continu $f_0 : X \to \mathbb{R}$.*

App 5. [4] Soit (X,d) un espace métrique.

- Si toute fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ est bornée, alors X est compact.
- Si X est sans point isolé et que toute application continue de X dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue, alors X est compact.

3 - Prolongement par densité

Théo 6. *[3] Soit f et g deux fonctions continues de l'espace topologique E dans l'espace vectoriel normé F.*
Si f et g coïncident sur une partie dense, alors f et g sont égales.

Théo 7. *[3] Soit (E,d) et (F,d') deux espaces métriques, F étant complet, A une partie dense de E et $f : A \to F$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application continue $g : E \to F$ qui prolonge f. De plus, g est uniformément continue.*

NB 8. [3] La norme reste la même, les bornes supérieures d'une fonction numérique continue sur une partie A et sur $\overline{A}$ étant égales.

App 9 (Intégrale de Riemann des fonctions réglées)**.** [3] On définit par $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier et $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réglées. Soit

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\lambda_i \end{array}$$

où $(x_0,...,x_n)$ est une subdivision adaptée à f et $f_{]x_i,x_{i+1}[} = \lambda_i$. Comme $\left|\left|\int_a^b f\right|\right| \leq (b-a)||f||_\infty$, la fonction ϕ est uniformément continue et on applique le théorème pour généraliser l'intégrale de Riemann aux fonctions réglées.

4 - Prolongement des applications linéaires

Théo 10 (Hahn-Banach)**.** *[5] Soit E un espace normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$, V un sous-espace et f une forme linéaire sur V. Alors il existe une forme linéaire F sur E telle que*

(i) la restriction de F à V coïncide avec f

(ii) $||F||_{E'} = ||f||_{V'}$

App 11. [5] Pour tout $x \in E$, on a $||x|| = \max \frac{l(x)}{||l||}$ où le maximum est pris sur l'ensemble des formes linéaires non nulles l sur E.

II - Aspects différentiels

1 - Des choses sur la régularité

Théo 12. *[3] Soit f une fonction continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans l'evn E et soit a un point de I. Si f est dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et si f' possède une limit l au point a, f est dérivable en a de dérivée l.*

NB 13. [3] Ne pas oublier l'hypothèse de continuité de f. (Considérer par exemple la fonction qui vaut x pour $x \leq 0$ et $x+1$ pour $x > 0$.

App 14. [3] Posons $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ non nulle pour tout $x \neq 0$, et dont toutes la dérivée est nulle en 0.

Théo 15. *[4] Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, Ω un voisinage ouvert de K. Il existe une fonction $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\theta = 1$ sur K, $\theta = 0$ dans Ω^c et $0 \leq \theta(x) \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

2 - Equations différentielles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On s'intéresse aux équations différentielles du premier ordre de la forme $x'(t) = f(t, x(t))(*)$ où x est une fonction $\mathcal{C}^1$ de t à valeurs dans Ω.

Déf 16. [4] Une **solution** de $(*)$ est un couple (x, J) où J est un intervalle contenu dans I et x une fonction $\mathcal{C}^1$ de J dans Ω qui vérifie $(*)$ en tout point de $\mathring{J}$.
Soit (x, J) une solution de $(*)$. Si $J = I$, on dit que la solution est **globale**.
Soit (x_1, J_1) et (x_2, J_2) deux solutions de $(*)$. On dit que (x_2, J_2) **prolonge** (x_1, J_1) si $J_1 \subset J_2$ et $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \in J_1$.
Une solution (x, J) est dite **maximale** si elle n'admet aucun prolongement.

Prop 17. *[4] Considérons f définie sur $]a, b[\times\mathbb{R}^n$. Soit (x, J) une solution de $(*)$ où $J =]\alpha, \beta[$, $a < \alpha < \beta < b$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$, $A > 0$ tels que $|x(t)| \leq A$ pour tout $t \in [\beta - \delta, \beta[$ (resp. $]\alpha, \alpha + \delta]$) alors x peut être prolongée au-delà de β (resp. au-delà de α) en une solution de $(*)$.*

App 18. [4] Soit $f : I \times \mathbb{R}^n$ où $I =]a, b[$. Supposons que f soit continue et bornée, alors toute solution au problème $(*)$ est globale.

Ex 19. [4] Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le problème

$$\begin{cases} x'(t) &= \frac{x^2(t)}{1+x^2(t)} \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

admet pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

III - Aspects analytiques

1 - Rayon de convergence

Déf 20. [2] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 : \text{ la suite } (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$$

est le **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$.

Prop 21. *[2] Soit $z \in \mathbb{C}$*

- *Si $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument*
- *Si $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge.*

Théo 22 (Abel)**.** *[2] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et on pose*

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

Alors

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Ex 23. [2] $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\log(2)$.

Cex 24. La réciproque est fausse. Par exemple,

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=\frac{1}{2}$$

alors que $\sum(-1)^n$ diverge.

Théo 25 (Taubérien faible)**.** *[2] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série entière sur le disque unité. On suppose qu'il existe $S\in\mathbb{C}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=S$. Si $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S$.*

2 - Fonction holomorphe

Théo 26 (Zéros isolés)**.** *[1] Si f est une fonction analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{U}$ et si f n'est pas identiquement nulle, alors l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans $\mathcal{U}$.*

Théo 27 (Prolongement analytique)**.** *[1] Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble $D\subset\mathcal{U}$ ayant un point d'accumulation dans $\mathcal{U}$, alors elles sont égales dans $\mathcal{U}$.*

Déf 28. [1] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *fonction poids* une fonction $\rho : I\longrightarrow\mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \int_I |x|^n\rho(x)dx<+\infty.$$

On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue c'est-à-dire muni du produit scalaire :

$$<f,g>_\rho=\int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx.$$

L'espace $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert.

Déf 29. [1] Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg(P_n)=n$. Cette famille s'appelle la famille des *polynômes orthogonaux* associés à la fonction ρ.

Théo 30 (Base hibertienne de polynômes orthogonaux)**.** *[1](Développement 2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha>0$ tel que :*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx<+\infty$$

alors la famille des polynômes $(\frac{P_n}{||P_n||_\rho})_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour la norme $||.||_\rho$.

Références

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*. HK, 2005.

[2] Xavier Gourdon. *Les maths en tête Analyse*. Ellipses, 2008.

[3] Alain Pommelet. *Cours d'analyse*. Ellipses, 1994.

[4] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2007.

[5] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel*. Cassini, 2003.