Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $X \subseteq E$. Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

Déf 1 ([5]). • On dit que f admet en a un **maximum global** si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in X$.

- On dit que f admet en a un **maximum local** s'il existe un voisinage de a dans E tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in V \cap X$.
- On dit que f admet en a un **maximum strict global** (resp. **local**) si les inégalités précédentes sont strictes pour $x \neq a$.

I - Existence et unicité

1 - Compacité

Théo 2 ([4]). *Si X est compact et f est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

App 3 ([4]). • La distance entre deux compactes est atteinte.

- Soit F un fermé non borné de E et $f : F \to \mathbb{R}$ une application continue telle que
$$\lim_{\substack{||x|| \to \infty \\ x \in F}} f(x) = +\infty.$$
Alors, il existe $x \in F$ tel que $f(x) = \inf_{y \in F} f(y)$.
- Soit K un compact de E et F un fermé de E. Alors il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $d(x, y) = d(K, F)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$||f - P_n||_\infty = \inf_{P \in \mathbb{R}_[X]} ||f - P||.$$
P_n est appelé le **polynôme de meilleure approximation uniforme de f l'ordre** n.

2 - Convexité

Soit C une partie convexe de E non vide.

Déf 4 ([1]). On dit que f est **convexe** si
$$\forall (x, y) \in C^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$
On dit que la fonction f est **strictement convexe** si l'inégalité précédente est stricte pour tout $x \neq y$ et tout $\lambda \in]0, 1[$.

Prop 5 ([1]). • *Si f est une fonction convexe sur C, alors l'ensemble des points réalisant le minimum est un convexe.*

- *Si f est une fonction strictement convexe sur C, alors f a au plus un point minimisant sur C.*

3 - Projection sur un convexe fermé

Dans cette section on se donne $(H, < . >)$ un espace de Hilbert et $X \subseteq H$ un convexe fermé non vide dans H

Théo 6 ([1]). *Soit $f \in H$. Alors il existe un unique $u \in X$*
$$\| f - u \| = \inf_{v \in X} \| f - v \| .$$
On appelle alors u la projection de f sur X et on le note $p_X(f)$
De plus $p_X(f)$ est caractérisé par :
$$p_X(f) \in X \text{ et } \forall v \in X, \ Re(< f - p_X(f); v - p_X(f) >) \leqslant 0.$$

App 7. (Théorème de représentation de Riesz) $\forall \phi \in H'$ (dual topologique de H) $\exists ! f \in H \ \forall v \in H \ \phi(v) = < f; v >$

II - Extrema locaux et différentielle

Soit $U \subseteq E$ un ouvert d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Soit $f : U \to \mathbb{R}$.

1 - Condition du premier ordre

Déf 8 ([4])**.** On dit que $a \in U$ est un **point critique** de f si f est différentiable en a et $D_a f = 0$.

Théo 9 ([4])**.** *Si f admet en a un extremum local et si f est différentiable en a, alors a est un point critique de f.*

NB 10.
- U est essentiel. En effet, pour $f : x \to x$ atteint son maximum sur [0,1] en $x = 1$ mais $f'(1) \neq 0$.
- La réciproque est fausse. En effet, pour $f : x \to x^3$. On a $f'(0) = 0$ et pourtant 0 n'est pas un extremum de f.

Théo 11 ([5])**.** *Etant donnés n points (x_i, y_i) du plan $\mathbb{R}^2$, avec des x_i non tous égaux entre eux. Alors il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu - y_i)^2$ soit minimal.*

Déf 12. La somme des carrés des distances (mesurées verticalement) des points donnés (x_i, y_i) à la droite d'équation $y = \lambda x + \mu$ est donc minimale. Cette droite est appelée **droite des moindres carrés**.

Théo 13 (Rolle)**.** *([4]) Soit $f : [a, b] \to$ une application vérifiant :*

(i) f est continue sur $[a, b]$

(ii) f est dérivable sur $]a, b[$

(iii) $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Prop 14. *Soit f une fonction convexe différentiable en $a \in U$. On a alors a est un point critique si et seulement si a est un extremum global de f.*

2 - Condition du second ordre

Théo 15 ([5])**.**
- *Si f admet en a un minimum (resp. maximum) local et si ${D_a}^2 f$ existe, alors a est un point critique et ${D_a}^2 f$ est une forme quadratique positive (resp.négative).*
- *Si, de plus, E est de dimension finie, si a est un point critique et que ${D_a}^2 f$ est une forme quadratique définie positive(resp. négative), alors f admet un minimum (resp.maximum) local strict en a*

Cor 16 ([4])**.** (Notation de Monge) Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $D_a f = 0$ pour $a \in U$. Posons $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$

- si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors f admet un minimum local en a ;
- si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors f admet un maximum local en a ;
- si $rt - s^2 < 0$, alors f n'a pas d'extremum en a ;
- si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

3 - Principe du maximum

On considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$

Déf 17 ([4])**.** On définit le **laplacien** de f par

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Théo 18. *Notons D la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$.*

- *Si pour tout $x \in D$ $\Delta f(x) > 0$, alors*

$$\forall x \in D, f(x) < \max_{\|y\|=1} f(y).$$

- *Si pour tout $x \in D$ $\Delta f = 0$, alors*

$$\forall x \in D \ \min_{\|y\|=1} f(y) \leqslant f(x) \leqslant \max_{\|y\|=1} f(y).$$

III - Quelques problèmes d'optimisation

1 - Optimisation sous contraintes

Rappel 19 (Fonctions implicites)**.**
Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$ et

$$\begin{array}{rcl} f = (f_1, ..., f_p) : U & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \text{ de classe } \mathcal{C}^k \\ (x, y) = (x_1, ..., x_q, y_1, ..., y_p) & \longmapsto & f(x, y) \end{array}$$

Soit $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$ et $\det \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i,j \leq p} \neq 0$.
Alors, il existe V un voisinage de $a \in \mathbb{R}^q$, Ω un voisinage de $(a, b) \in \mathbb{R}^n$ et $\phi : V \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \text{ avec } x \in V, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x).$$

Théo 20 (Extrema liés)**.** *(Développement 1) Soit $f, g_1, ..., g_p : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert). Posons*

$$X = \{\omega \in U : g_1(\omega) = ... = g_p(\omega) = 0\}.$$

Si la restriction de f à X admet un extremum local en $a \in X$ et si la famille $(D_a g_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est linéairement indépendante, alors il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$D_a f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D_a g_i$$

*Les $(\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ sont appelés les **multiplicateurs de Lagrange**.*

App 21 ([4])**.** $\mathcal{SO}_n$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{SL}_n$ qui minimise la norme définie par : si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n \parallel M \parallel_2 = (\sum_{i,j} m_{i,j}^2)^{1/2}$

2 - Optimisation numérique

Nous nous intéressant dans cette partie à la recherche numérique des extrema à l'aide d'un algorithme

Méthode de Newton
On considére $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$.
Soit u un extremum local de f, alors $F(u) = f'(u) = 0$. Donc u est un zéro de $F = f'$, qu'on supposera régulier c'est à dire tel que $F'(u) \neq 0$.

Théo 22 ([2] [5])**.** *Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [u - \epsilon; u + \epsilon]$ la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$ converge vers u.*
Il existe de plus $C > 0$ telle que $\mid x_{n+1} - u \mid \leqslant C \mid x_n - u \mid^2$

NB 23. Nous pouvons écrire le même théorème pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

3 - Optimisation géométrique

Déf 24 (Ellipsoïde de John-Loewner)**.** (Développement 2) ([3]) L'ensemble $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leqslant 1\}$, où q est une forme quadratique définie positive, est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ centré en l'origine.

Lemme 25 (Développement 2)**.** ([3]) (strict log-concavité du déterminant) Si A et B sont deux matrices distinctes symétriques réelles définies positives, α et β dans $]0; 1[$ tels que $\alpha + \beta = 1$, alors $det(\alpha A + \beta B) > (det\ A)^\alpha (det\ B)^\beta$.

Théo 26 (Développement 2)**.** *([3]) Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.*

Références

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*. HK, 2005.

[2] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences, 2006.

[3] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 3*. Cassini, 2010.

[4] Xavier Gourdon. *Les maths en tête Analyse*. Ellipses, 2008.

[5] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel*. Cassini, 2003.