(X, d) espace métrique.

I - Généralités

1 - Suites de Cauchy et espace complet

Déf 1 ([5])**.** Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans (X, d) est dite **de Cauchy** si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq n_0, d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Prop 2 ([7])**.** *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Prop 3 ([7])**.** *Si une suite de Cauchy a un point d'adhérence a, alors elle converge vers a.*

NB 4 ([5])**.** Une suite convergente est de Cauchy mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Ex 5. La suite de Cauchy $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $], 1[$.

Déf 6 ([5])**.** (X, d) est dit **complet** si toute suite de Cauchy de (X, d) converge vers un élément de X.

Ex 7 ([7])**.**

- $\mathbb{R}$ est complet mais pas $\mathbb{Q}$.
- Tout espace métrique discret est complet.
-]0,1] n'est pas complet.

App 8 ([5])**.** Soit A une partie dense d'un espace métrique X, Y un espace métrique complet, $f : A \to Y$ uniformément continue. Alors

(i) Il existe une unique application continue $g : X \to Y$ prolongeant f.

(ii) g est uniformément continue.

Ex 9. L'unique application uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et qui soit l'identité sur $\mathbb{Q}$ est l'identité sur $\mathbb{R}$.

2 - Premières propriétés

Prop 10 ([5])**.** *On a équivalence entre*

- *(X, d) est complet.*
- *Toute suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non vide donc réduite à un point.*

Théo 11 ([6])**.** *Soit (E, d) un espace métrique complet. Alors*

(i) Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'ouverts denses de E, $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ est encore dense dans E.

(ii) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fermés d'intérieur vide de E, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ est encore d'intérieur vide dans E.

Prop 12 ([6])**.** *(**Développement 2**) L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ qui ne sont dérivables en aucun point contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.*

Prop 13 ([7])**.** *Soit E et E' deux espaces métriques. Soit f une bijection de E sur E' uniformément continue tout comme son inverse. Alors E est complet si et seulement si E' est complet.*

Prop 14 ([7])**.** *Soit E un espace métrique. Soit $A \subset E$ et $A \neq \emptyset$. A est muni de la distance induite par celle de E.*

(i) Si A est complète, alors A est fermée dans E.

(ii) Réciproquement, si E est complet, toute partie fermée est complète.

Prop 15 ([7])**.** *Soit $(E_i, d_i)_{1\leq i\leq s}$ des espaces métriques et E l'ensemble produit. On munit E de la distance $d(x, y) = \max\limits_{1\leq i\leq s} d_i(x_i, y_i)$. Alors (E, d) est complet si et seulement si pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, (E_i, d_i) est complet.*

App 16 ([7])**.** Les espaces $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, et tout espace normé de dimension finie sont complets.

Déf 17 ([7])**.** Soit (E, d) un espace métrique, une application $f : E \to E$ est dite **contractante** s'il existe une constante $k \in]0, 1[$ telle que pour tout $x, y \in E$, $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.

Théo 18 ([7])**.** *Si (E, d) est un espace métrique complet, toute application contractante $f : E \to$, admet un point fixe unique.*

Théo 19 ([2],[3])**.** *(**Développement 1**) Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un intervalle I voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}$ et une application $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ solution de $y' = F(t, y)$ telle que $\phi(t_0) = x_0$. De plus, il y a unicité pour le problème de Cauchy de cette équation différentielle en (t_0, x_0).*

3 - Compacité et complétude

Déf 20 ([5])**.** Un espace topologique X est dit **compact** si tout recouvrement ouvert de X contient un sous-recouvrement fini.

Prop 21. *Tout espace métrique compact est complet.*

Prop 22 ([7])**.** *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors A est compacte si et seulement si A est complète et bornée.*

Déf 23 ([7])**.** Une partie A d'un espace métrique E est dite **précompacte** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules $B(x_i, r_i)$ avec $r_i \leq \varepsilon$ dont la réunion contient A.

Théo 24 ([7])**.** *Soit E un espace métrique. Alors, on a équivalence entre :*

- *E est compact*
- *E est précompact et complet.*

Déf 25 ([4])**.** Une partie H de $\mathcal{C}(X)$ est dite **équicontinue en un point** $x_0 \in X$ si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) < \eta \Longleftarrow \forall h \in H, |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$

Elle est dite **équicontinue** si elle est équicontinue en tout point de X.

Théo 26 (Ascoli)**.** *([4]) Une partie de $\mathcal{C}(X)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X)$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue.*

4 - Complétion

Prop 27 ([7])**.** *Soit X un ensemble quelconque. Si (E, d) est un espace métrique complet, alors l'espace $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées de X dans E est complet pour la distance de la convergence uniforme.*

Déf 28 ([7])**.** On appelle **complété** d'un espace métrique E tout couple $(\phi, \hat{E})$ où $\hat{E}$ est un espace métrique complet et où ϕ est une isométrie de E sur un sous-espace dense de $\hat{E}$.

NB 29 ([7])**.** Le complété est unique à un isomorphisme près. Si $(\phi, \hat{E})$ et $(\phi', \hat{E}')$ sont deux complétés de E, alors il existe une unique isométrie ϕ de $\hat{E}$ dans $\hat{E}'$ telle que $\psi \circ \phi = \phi'$.

Prop 30 ([7])**.**

- *Pour tout espace métrique E, il existe un complété $(\phi, \hat{E})$.*
- *Pour tout application uniformément continue f de E dans un espace métrique complet F, il existe une unique application uniformément continue $\hat{f} : \hat{E} \to F$ vérifiant $\hat{f} \circ \phi = f$*

II - Espaces de Banach

Déf 31 ([8])**.** Un espace vectoriel normé complet est appelé **espace de Banach**.

1 - Espace des applications linéaires continues

Déf 32 ([8])**.** Si $(E, ||.||)$ et $(F, ||.||)$ sont deux $\mathbb{K}$ espaces normés, on note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

Théo 33 ([8])**.** *Si $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on définit la norme de l'application linéaire continue f par*

$$||f|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||f(x)||.$$

Alors $(\mathcal{L}_c(E,F), ||.||)$ est un espace normé.

Théo 34 ([8])**.** *Lorsque l'espace F est complet, l'espace $(\mathcal{L}_c(E,F), ||.||)$ est un espace de Banach.*

2 - Espaces L^p

Déf 35. On pose

$$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f| < \infty\}$$

On identifie deux fonctions L^1 égales p.p.

Déf 36 ([1])**.** Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

et

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \exists C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On identifie deux fonctions de L^∞ qui coïncident p.p. On note

$$||f||_\infty = \inf\{C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Théo 37 (Inégalité de Hölder)**.** *([1]) Soit $1 \leq p \leq \infty$ et q son exposant conjugué. Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Alors, $fg \in L^1$ et*

$$\int |fg| \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Théo 38 ([1])**.** *L^p est un espace vectoriel et $||.||_p$ est une norme pour $1 \leq p \leq \infty$.*

Théo 39 (Riesz-Fischer)**.** *([1]) L^p est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.*

3 - Espace de Hilbert

Déf 40 ([1])**.** Un **espace de Hilbert** est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire complet pour la norme associée.

Ex 41 ([1])**.** $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

Théo 42 (Projection sur un convexe fermé)**.** *([4]) Soit C une partie fermée, convexe et non vide de H. Alors, pour tout $f \in H$, il existe un unique $g \in C$ tel que*

$$||f-g|| = d(f,C) = \inf_{h \in C} ||f-h||.$$

*Ce point, appelé **projection de** x **sur** C et il est caractérisé par la propriété suivante :*

$$\forall z \in C, Re((x-y, z-y)) \leq 0.$$

Rappel 43 ([1])**.** On désigne par E' le dual de E ie l'espace des formes linéaires et continues sur E.

Théo 44 (représentation de Riez)**.** *([4]) Etant donné $\phi \in H'$, il existe un unique $f \in H$ tel que*

$$\phi(v) = (f,v).$$

De plus, on a

$$|f| = ||\phi||_{H'}.$$

Références

[1] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications*. Masson, 1987.

[2] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences, 2006.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête Analyse*. Ellipses, 2008.

[4] Francis Hirsch and Gilles Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2009.

[5] Hervé Queffélec. *Topologie*. Dunod, 2012.

[6] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2007.

[7] Claude Tisseron. *Notions de topologie. Introduction aux espaces fonctionnels*. Hermann Paris, 1985.

[8] Jean Voedts. *Cours de mathématiques MP-MP**. Ellipses, 2002.