

Leçon 122

Anneaux principaux. Exemples et applications.

I - Anneaux principaux

II - Le cas des anneaux euclidiens

III - Applications

Dev 1 : Théorème des deux carrés

Dev 2 : Algorithme de Berlekamp

I - Anneaux principaux

1) Arithmétique dans les anneaux : def idéal, idéal premier/maximal/principal, divisibilité idéaux/éléments, def irréductibles, premiers, inversibles, associés, implications et contre-exemples [Per04]

2) Anneaux principaux : def anneau principal, irréductibles = premiers, lemme de Gauss, lemme d'Euclide, def existence et propriétés PGCD, théorème de Bézout, théorème des restes chinois, exemples [Per04], [Szp09]

3) Anneaux factoriels : def anneau factoriel, principal $\Rightarrow$ factoriel, réciproque fausse, irréductibles = premiers, def valuations, reformulation PGCD, factoriel + Bézout $\Rightarrow$ principal, exemples [Per04], [Szp09]

II - Le cas des anneaux euclidiens

1) Anneaux euclidiens : def anneau euclidien, euclidien $\Rightarrow$ principal, cas de $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$, exemples, cas $\mathbb{Z}[\omega]$, cas stathme croissant, cas polynômes [Rom21]

2) Algorithme d'Euclide : algo d'Euclide, étendu, binaire, complexité, application à l'étude de $SL_2(\mathbb{Z})$ [Dem08], [Les+20]

3) L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss : def, stathme, inversibles, sommes de deux carrés stable par multiplication, cas des entiers premiers, [dev 1], description des irréductibles [Per04]

III - Applications

1) Arithmétique des polynômes : $A[X]$ principal ssi A corps, A factoriel $\Rightarrow A[X]$ factoriel, [dev 2], existence polynôme annulateur dans les extensions finies, pour les endomorphismes, lemme des noyaux, décomposition de Dunford, exemples [Per04], [Rom21]

2) Équations diophantiennes : théorème des restes chinois dans $\mathbb{Z}$, fonction réciproque, résolution système d'équations diophantiennes, algorithme, app : surjectivité de $SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, exemples [Rom21], [Les+20]

Références

- [Dem08] Michel DEMAZURE. *Cours d'algèbre Michel Demazure*. Cassini, 2008.
- [Les+20] Didier LESESVRE, Pierre MONTAGNON, Pierre LE BARBENCHON et Théo PIERRON. *131 développements pour l'oral : Agrégation externe mathématiques-informatique*. Dunod, 2020.
- [Per04] Daniel PERRIN. *Cours d'algèbre*. Ellipse, 2004.
- [Rom21] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck supérieur, 2021.
- [Szp09] A. SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 : cours complet avec 400 tests et exercices corrigés. Algèbre*. Pearson Education, 2009.