I - Généralités

1 - Définitions et premiers exemple [1] [2] [4]

Soit G un groupe multiplicatif d'élément neutre e.

Déf 1. Soit X un ensemble non vide. On peut définir une **action** de G sur X par une application :

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g,x) &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

vérifiant les conditions suivantes

- $\forall g_1, g_2 \in G \times G, \forall x \in X g_1.(g_2.x) = g_1 g_2.x$
- $\forall x \in X, e.x = x$.

On dit alors que G **opère** (ou **agit**) sur X.

NB 2.
- On définit de manière similaire les groupes opérant à droite.
- Il est équivalent de se donner un homomorphisme $\phi : G \longrightarrow S(X)$, où $S(X)$ désigne le groupe des bijections de X. On pose alors $g.x = \phi(g)(x)$.

Ex 3. G opère sur G par l'application :

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (s,x) &\longmapsto sx \end{aligned}$$

et on dit que G agit par **translation à gauche** sur lui-même.
De même, G opère sur $\mathcal{P}(G)$ par translation à gauche.

App 4 (Théorème de Cayley)**.** Si G est fini de cardinal n, G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

Ex 5. G opère sur G par l'application :

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g,x) &\longmapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

et on dit que G agit par **conjugaison** sur lui-même. C'est une action par automorphisme.

Ex 6. Le groupe des permutations S d'un ensemble X opère sur X par l'application

$$\begin{aligned} S \times X &\longrightarrow X \\ (s,x) &\longmapsto s(x). \end{aligned}$$

Déf 7. (i) On dit que G opère **transitivement** sur X si on a :

$$\forall x \in X, \forall y \in X, \exists g \in G, g.x = y.$$

(ii) On dit que G opère **fidèlement** si $\phi : G \longrightarrow S(X)$ est injectif c'est-à-dire si $g.x = x$ pour tout $x \in X$ implique $g = 1$.

Déf 8. Soit $x \in X$. L'ensemble $G_x = \{s.x, s \in G\}$ est appelé **orbite** de x.

Déf 9. Le **stabilisateur** d'un élément x de X est le sous-groupe de G défini par $Stab_G(x) = \{s \in G, s.x = x\}$.

NB 10. L'ensemble des classes à gauche $G/\mathrm{Stab}_G(x)$ est en bijection avec G_x.

Déf 11. Le **fixateur** de $g \in G$ est

$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in E : gx = x\}.$$

2 - Equation aux classes et formule de Burnside [1]

Théo 12 (Equation aux classes)**.** *Soit X un ensemble fini et G un groupe opérant sur E. Si Ω est un ensemble contenant exactement un représentant de chaque orbite, on a alors*

$$|X| = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{|G|}{|Stab_G(\omega)|}$$

NB 13. $|\mathrm{Stab}_G(\omega)|$ a un sens car il est indépendant du choix de représentant.

Rappel 14. Soit G un groupe fini de cardinal $n = p^\alpha m$ avec $p \wedge m = 1$. On appelle **p-Sylow** de G un sous-groupe de cardinal p^α.

App 15 (Théorème de Sylow)**.** (**Développement 1**) Soit G un groupe de cardinal $|G| = p^\alpha m$ avec $p \wedge m = 1$.

(i) G contient au moins un p-Sylow.

(ii) Les p-Sylow sont tous conjugués et donc leur nombre k divise n.

(iii) On a $k = 1(p)$ et donc k divise m. (ne sera pas démontré)

Théo 16 (Formule de Burnside)**.** *Soit G un groupe fini agissant sur X un ensemble fini. Soit Ω l'ensemble des orbites distinctes. Alors*

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Fix(g).$$

Théo 17. *Cette formule nous permet d'affirmer que le nombre de colliers de 5 perles différents que l'on peut réaliser avec deux couleurs est 8.*

II - Premières applications

1 - Etude de p-groupes [4]

Déf 18. Si p est premier, on appelle **p-groupe** un groupe dont le cardinal est une puissance de p.

NB 19. Un groupe de cardinal p est cyclique.

Prop 20. *Soit G un p-groupe opérant sur un ensemble X et on pose*

$$X^G = \{x \in X : \forall g \in G, g.x = x\}.$$

Alors, on a $|X| = |X^G|(p)$.

Prop 21. *Le centre d'un p-groupe distinct de $\{1\}$ n'est pas réduit à $\{1\}$.*

App 22. Tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

Cex 23. Un sous-groupe d'ordre p^3 n'est pas nécessairement abélien. Il suffit de considérer dans $GL_3(\mathbb{F}_p)$, le sous-groupe défini par

$$\{A = (a_{i,j}) : a_{i,i} = 1 \text{ et } a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j\}$$

2 - Groupe symétrique [4]

Prop 24. *Le groupe $\mathcal{S}_n$ agit sur $X = [\![1,n]\!]$ via*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n \times X &\longrightarrow X \\ (\sigma, i) &\longmapsto \sigma(i). \end{aligned}$$

App 25. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Alors, $<\sigma>$ opère aussi sur X.
Soit $F_1, ..., F_r$ les orbites de X sous $<\sigma>$. Alors les permutations σ_i définies par

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \notin F_i \\ \sigma(x) \text{ si } x \in F_i \end{cases}$$

sont des cycles, d'ordre $|F_i|$, deux à deux permutables et on a

$$\sigma = \sigma_1 ... \sigma_r.$$

NB 26. Dans l'opération de $\mathcal{S}_n$ sur $X = [\![1,n]\!]$, le stabilisateur d'un point isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$.

Ex 27. $\mathcal{S}_n$ agit sur $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ ($\mathbb{K}$ est un corps) via

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n \times \mathbb{K}[X_1, ..., X_n] &\longrightarrow \mathbb{K}[X_1, ..., X_n] \\ (\sigma, P) &\longmapsto P(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

Les polynômes symétriques forment l'ensemble des points fixes pour cette action.

NB 28.
- Ici, $X = \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ n'est pas un ensemble fini et on ne peut donc pas utiliser l'équation aux classes et la formule de Burnside.
- Il y a donc un nombre infini d'orbites.

NB 29. $\mathcal{S}_n$ agit sur lui-même par conjugaison.

Rappel 30. Un **automorphisme intérieur** est donné, pour $g \in G$, par la formule $i_g(x) = gxg^{-1}$.

Théo 31 (**Développement 2**)**.** *Pour $n \neq 6$, tout automorphisme de $\mathcal{S}_n$ est intérieur.*

III - Actions de groupe sur les matrices

- **Action de $O_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ [3]**

Théo 32 (Spectral)**.** *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe alors $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $A' =^t PAP$ est diagonale.*

NB 33. En considérant l'action

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ (P, A) &\longmapsto^t PAP \end{aligned}$$

Ainsi, les orbites sont caractérisées par les valeurs propres et par leur multiplicité.

- **Action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$ [3]**

Théo 34 (Sylvester)**.** *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tPAP$ soit de la forme*

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & I_q & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

avec $p + q = r$ où $r = rg(A)$.
*(p, q) est appelé la **signature** de A.*

NB 35. Les orbites sont caractérisées par la signature

- Action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [2]

Théo 36. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe $F_1, ..., F_r$ sous espaces vectoriels de E stables par f tels que*

(i) $E = F_1 \oplus ... \oplus F_r$

(ii) Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $f_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique.

(iii) Si P_i désigne le polynôme minimal de f_i, alors on a $F_{i+1}|F_i$ pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$.

*On appelle $P_1, ..., P_r$ la suite des **invariants de similitude** et cette suite est unique.*

Cor 37 (Réduction de Frobenius)**.** Si $P_1, ..., P_r$ désigne la suite des invariants de similitude de $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix}.$$

NB 38. Ainsi, les orbites sont caractérisées par les invariants de similitude.

Références

[1] Josette Calais. *Elements de théorie des groupes*. PUF, 1984.

[2] Xavier Gourdon. *Les maths en tête Algèbre*. Ellipses, 2009.

[3] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2011.

[4] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.