On suppose connue la notion d'indépendance.

Rappel 1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On appelle* ***variable aléatoire*** *toute application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.*
On appelle ***loi d'une variable aléatoire*** *X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ la mesure image de $\mathbb{P}$ par X.*

I - Espérance [1] [3] [4] [5]

1 - Définition et premières propriétés

Déf 2. Si X est une variable aléatoire réelle intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on appelle **espérance de** X le réel défini par

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Si $\mathbb{E}[X] = 0$, on dit que X est **centrée**. Si $X = (X_1, ..., X_n)$ est un vecteur aléatoire dont toutes les composantes sont intégrables, on note $\mathbb{E}[X]$ le vecteur $(\mathbb{E}[X_1], ..., \mathbb{E}[X_n])$.

Prop 3.
- *L'application $X \mapsto \mathbb{E}[X]$ est linéaire.*
- *Pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.*

Théo 4. *S'il existe une mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que pour tout fonction continue bornée g, $\mathbb{E}[g(X)] = \int_\mathbb{R} g(x) d\mu(x)$ alors μ caractérise la loi de X.*

2 - Calculs

Théo 5 (Transfert)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire sur cet espace, à valeurs réelles, de loi $\mathbb{P}_X$ et g une fonction mesurable réelle. Alors, si l'une des expressions $\int_\Omega (g \circ X) d\mathbb{P}$ ou $\int_\mathbb{R} g d\mathbb{P}_X$ existe, il en est de même pour l'autre et on a*

$$\int_\Omega (g \circ X) d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} g d\mathbb{P}_X.$$

Théo 6. *Soit X une variable aléatoire discrète, et D un ensemble fini ou dénombrable inclus dans $\mathbb{R}$ tel que $X(\Omega) = D$. Alors, X est intégrable si et seulement si*

$$\sum_{i \in D} |i| \mathbb{P}(X = i) < +\infty.$$

Si cette somme est finie, on a alors

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i \in D} i \mathbb{P}(X = i).$$

Ex 7 (Espérances de loi discrète)**.** cf Annexe

Théo 8. *Soit X une variable aléatoire admettant la fonction f comme densité. Alors, X est intégrable si et seulement si*

$$\int_\mathbb{R} |x| f(x) d\lambda(x).$$

Si cette intégrable est convergente, on a alors

$$\mathbb{E}[X] = \int_\mathbb{R} x f(x) dx.$$

Ex 9 (Espérances de loi à densité)**.** cf Annexe

Cex 10. Il existe des variables à densité n'ayant pas d'espérance. Par exemple, une variable aléatoire X de densité de probabilité

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}. \end{array}$$

3 - Principales inégalités et propriétés

Théo 11 (Inégalité de Markov)**.** *Soit X une variable aléatoire positive, intégrable. Alors, on a*

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Théo 12 (Inégalité de Jensen)**.** *Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans l'intervalle ouvert I. Soit f une fonction convexe de I dans $\mathbb{R}$. Alors*

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)].$$

Théo 13. *Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes. XY est intégrable si et seulement si X et Y le sont et si c'est le cas :*

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

II - Moments d'une variable aléatoire [1] [2] [5]

1 - Définition

Déf 14. Soit X une variable aléatoire. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que X **admet un moment d'ordre** k si X^k admet une espérance. Dans ce cas le **moment d'ordre** k **de** X est

$$\mathbb{E}[X^k] = \int_\Omega X^k d\mathbb{P}.$$

Théo 15. *Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre $k \geq 2$. Alors X admet des moments d'ordre $1, 2, ..., k$.*

Déf 16. Le **moment centré d'ordre** k de X, lorsqu'il est défini, est

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k] = \int_\Omega (X - \mathbb{E}[X])^k d\mathbb{P}.$$

Prop 17. *Une variable aléatoire X admet un moment d'ordre k si et seulement si elle admet un moment centré d'ordre k.*

2 - Moments d'ordre 2

Déf 18. Soit X, Y deux variables aléatoires de carré intégrable. La **variance** de X est son moment centré d'ordre 2

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

La **covariance** de X et de Y est

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

NB 19. Il existe des variables aléatoires ayant une espérance mais pas de variance.

Ex 20. Cas discret : X variable aléatoire avec $\mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$.
Cas continu : X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, de densité de probabilité

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{2}{(1+t)^3} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \end{aligned}$$

Formule 21 (König-Huygens)**.** *Soit X variable aléatoire de carré intégrable, alors*

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Ex 22. cf Annexe

Théo 23. *Soit X une variable aléatoire de carré intégrable. Alors on a équivalence entre les propositions suivantes :*

(i) $Var(X) = 0$

(ii) $X = \mathbb{E}[X]$.

NB 24. $\mathbb{E}[X]$ est la meilleure manière d'approcher X au sens des moindres carrés.

Prop 25. *Si X et Y sont intégrables et indépendantes, alors le couple (X, Y) admet une covariance et $Cov(X, Y) = 0$.*

NB 26. La réciproque est fausse.

Cex 27. Soit X une variable aléatoire telle que

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{3}.$$

et $Y = X^2$.

Théo 28 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.** *Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors, on a*

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}.$$

Théo 29 (Inégalité de Cauchy Schwarz)**.** *Soit X et Y deux variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2. Alors*

$$\mathbb{E}[XY]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2].$$

Théo 30 (Développement 1)**.** *Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, ω son module de continuité ie*

$$\omega(h) = \sup\{|f(u) - f(v)| : |u - v| \leq h\}.$$

Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme

$$B_n(f,x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

le $n^{ième}$ polynôme de Bernstein de f. Alors
Alors B_n converge vers f uniformément sur [0,1].

Théo 31 (des moments)**.** *(Développement 1) Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un intervalle bornée $[a,b]$. Si $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors X et Y ont même loi.*

III - Fonction caractéristique et génératrice [1]

Déf 32. Soit X variable aléatoire à valeurs à $\mathbb{N}$. On définit la **fonction génératrice** de X la fonction définie par

$$G_X : t \mapsto \mathbb{E}[t^X].$$

NB 33. La fonction génératrice caractérise la loi.

Théo 34. *(i) X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et, dans ce cas, $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$.*

(ii) X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1, et, dans ce cas, $Var(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

(iii) Plus généralement, X admet un moment d'ordre k si et seulement si G_X est k fois dérivable à gauche en 1, et, dans ce cas :

$$G_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)(X-2)...(X-k+1)].$$

Ex 35.
- Pour $X \sim \mathcal{B}(p)$, on a $G_X(t) = 1-p+pt$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, on a $G_X(t) = (1-p+pt)^n$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ sur $\mathbb{R}$.

Déf 36. On appelle **fonction caractéristique** d'un vecteur aléatoire X la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i<t,X>}].$$

Ex 37. Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $\Phi_X(t) = e^{imt}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

Prop 38 (Développement 2)**.** *Soit X une variable aléatoire. Si X admet un moment d'ordre n alors ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\Phi_X^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega X^k \exp(itX) d\mathbb{P} \text{ ie } \Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$$

IV - Estimation de l'espérance d'une variable aléatoire [1]

Déf 39. On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ **converge presque sûrement** vers X si

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega : \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1.$$

Théo 40 (Loi forte des grands nombres)**.** *Soit X une variable aléatoire intégrable. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes et de même loi que X. Alors*

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}[X]$$

NB 41. Ce théorème permet en statistique de trouver un estimateur asymptotiquement sans biais.

Déf 42 (Convergence en loi)**.** On dit que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si pour tout f continue bornée $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$.

Théo 43 (Levy)**.** *Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors on a*

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^d, \phi_{X_n}(t) \longrightarrow \phi_X(t).$$

Théo 44 (Théorème centrale limite)**.** *(Développement 2) Soit X_n une suite de variables iid à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant un moment d'ordre 2. Alors*

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}[X_i])\right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, Var(X_1)).$$

NB 45. Ce théorème est essentiel pour la construction d'intervalle de confiance en statistique.

Références

[1] Walter Appel. *Probabilités pour les non-probabilistes*. HK, 2013.

[2] Philippe Barbe and Michel Ledoux. *Probabilité*. EDP Sciences, 2007.

[3] Dominique Foata and Aimé Fuchs. *Calcul des probabilités*. Dunod, 2012.

[4] Olivier Garet and Aline Kurtzmann. *De l'intégration aux probabilités*. Ellipses, 2011.

[5] Bertrand Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques*. Ellipses, 2007.

Nom/Paramètres	$X(\Omega)$	Loi	Espérance	Variance
LOIS DISCRÈTES		$\mathbb{P}(X=k)$		
Uniforme	$[\![1,n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}(X=1)=p$ $\mathbb{P}(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
LOIS À DENSITÉ		Densité $f(x)$		
Uniforme $\mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$\chi^2(n)$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$	n	$2n$
Beta $B(a,b)$	$]0,1[$	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$
Gamma $\Gamma(\alpha,\beta)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{\beta x}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$