

61 Leçon 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

I. Notion d'indépendance

1. Événements indépendants [GOU] [CHA]

Probabilité conditionnelle, formule des probabilités totales, événements indépendants, événements mutuellement indépendants, indé avec les tribus engendrées

2. Variables aléatoires indépendantes [CHA]

Tribus indé, VA indés, indé avec la loi du vecteur, cas des VA discrètes, cas des VA à densité

II. Propriétés autour de l'indépendance

1. Lien avec les moments [CHA]

Produit des espérances, covariance, covariance nulle, contre-exemple, somme des variances

2. Somme de variables aléatoires indépendantes [CHA] [KUR]

Cas discret, cas à densité, fonction génératrice, G_X caractérise la loi, cas de la somme, exemples, formule de Wald, fonction caractéristique, ϕ_X caractérise la loi, cas de la somme, exemples

III. Indépendance et théorèmes limites

1. Lemmes de Borel-Cantelli [CHA] [KUR] [BL]

Limsup, lemme de BC1, traduction en français, lemme de BC2, traduction en français, équivalences pour la convergence p.s

2. Loi des grands nombres [CHA]

Loi faible, loi forte, cas des indicatrices, moyenne empirique

3. Théorème central-limite [CHA] [BER]

Théorème de Lévy, [DEV 1 : théorème central limite](#), théorème de Moivre-Laplace, intervalle de confiance, delta-méthode, somme de lois Gamma, [DEV 2 : formule de Stirling par le TCL](#)

Présentation :

- La formule qui définit l'indépendance entre deux événements nous dit que le fait de savoir que A est réalisé ne donne pas d'information sur la réalisation ou non de l'événement B .
- L'indépendance d'événements est en fait équivalente à l'indépendance des tribus engendrées par ces événements.
- Pour les vecteurs gaussiens, le fait que la covariance soit nulle est en fait équivalent à l'indépendance.

Développements :

- Théorème central limite
 - Analyse pour l'agrégation de mathématiques, Bernis, p200
 - Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch, p57

- Formule de Stirling avec le TCL
 - De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzmann, p180-314-556

Références :

- [GOU] Algèbre-Probabilités, Gourdon
- [CHA] Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch
- [KUR] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman
- [BL] Probabilités, Barbe-Ledoux
- [BER] Analyse pour l'agrégation de mathématiques, Bernis

Leçon 2.6.6 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé

Notion d'indépendance

1) Événements indépendants [603][CHA]

Déf 1 : Soit $A \in \mathcal{A}$ avec $P(A) > 0$. Soit $B \in \mathcal{A}$. La probabilité conditionnelle de B sachant A est définie par :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

L'application $P(\cdot|A)$ définit une probabilité sur Ω .

Prop 2 (Formule des probabilités totales) : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable d'événements qui forment une partition de Ω et tel que $P(A_i) > 0 \forall i \in I$. Alors $\forall B \in \mathcal{A}$,

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

Déf 3 : On dit que deux événements A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \text{ On note } A \perp B.$$

Remarque 4 : Si $P(A) > 0$, on a $A \perp B$ si : $P(B|A) = P(B)$.

Déf 5 : On dit que n événements $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants si pour tout sous-ensemble non vide $\{i_1, \dots, i_k\}$ de $\{1, \dots, n\}$ on a : $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_k})$

Contre-ex 6 : On jette deux pièces. On pose $A = \{\text{pile au premier lancer}\}$, $B = \{\text{pile au second lancer}\}$ et $C = \{\text{même résultat aux deux lancers}\}$.

Alors les 3 événements sont 2 à 2 indépendants, mais ne sont pas indépendants.

Prop 7 : Les n événements $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants si $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times \dots \times P(A_n)$ pour tout choix de $B_i \in \sigma(A_i) = \{\emptyset, \Omega, A_i, A_i^c\}$.

Prop 8 : Si $A \perp B$, alors $A \perp B^c$.

Les événements de probabilité nulle ou 1 sont indépendants de tous les autres événements.

2) Variables aléatoires indépendantes [CHA]

Déf 9 : On dit que les tribus $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ incluses dans $\mathcal{A}$, sont indépendantes si tous leurs éléments sont indépendants, c'est-à-dire : $\forall A_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, \forall A_n \in \mathcal{B}_n, P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$.

Déf 10 : On dit que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ à valeurs dans $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$ sont indépendantes si les tribus $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ le sont. Cela équivaut à : $\forall F_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, \forall F_n \in \mathcal{E}_n, P(X_1 \in F_1 \cap \dots \cap X_n \in F_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in F_i)$.

Théorème 11 : Les VA $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si la loi du vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ sur $E_1 \times \dots \times E_n$ est le produit des lois de $X_1, \dots, X_n$, c'est-à-dire :

$$P(X_1, \dots, X_n) = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}.$$

Prop 12 : Soit X et Y deux VA à valeurs à valeurs dans E_1 et E_2 . Alors $X \perp Y$ si $\forall (x_1) \in E_1 \times E_2$ on a :

$$P(X=x_1, Y=y) = P(X=x_1) \cdot P(Y=y).$$

Prop 13 : Soit $X_1, \dots, X_n$ des VA à densité à valeurs réelles. Elles sont indépendantes si la densité du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ est égale au produit des densités des X_i .

III Propriétés autour de l'indépendance

1) Lien avec les moments [CHA]

Soit X et Y deux variables aléatoires.

Théorème 14 : Si X et Y sont indépendantes et intégrables, alors XY est intégrable et :

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$$

Déf 15 : Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, on appelle covariance de X et Y la quantité :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

Remarque 16 : On a $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$

et $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$.

Prop 17: Si X et Y sont intégrables et indépendantes, alors leur covariance est nulle.

Contre-ex 18: Soit $X_1 \sim N(0,1)$ et $\varepsilon \sim \text{Rademacher}(\frac{1}{2})$ avec $\varepsilon \perp X_1$. Soit $X_2 = \varepsilon X_1$. Alors $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ mais X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Théorème 19: Soit $X_1, \dots, X_n$ des VA avec moment d'ordre 2. Alors: $\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$.

En particulier, si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

2) Somme de variables aléatoires indépendantes [CHA] [KUR]

Prop 20: Si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $X \perp Y$, alors $X+Y$ est discrète et: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^n P(X=k)P(Y=n-k)$$

Prop 21: Si X a une densité f_X et si Y a une densité f_Y avec $X \perp Y$, alors $X+Y$ a une densité f_{X+Y} donnée par: $\forall z \in \mathbb{R}, f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)f_Y(z-x) dx$.

Déf 22: Soit X une VA à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice de X est la série entière définie par: $\forall z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leq 1$, $G_X(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)z^k$.

Prop 23: Si $X \perp Y$, alors $G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$.

Exemple 24: Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec $X \perp Y$, alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Soit $X \sim \text{Bin}(n, p)$ et $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ avec $X \perp Y$, alors $X+Y \sim \text{Bin}(n+m, p)$.

Théorème 22 bis: Soit $[0,1[$, G_X est de classe C^∞ et $G_X^{(n)}(z) = E[X(X-1)\dots(X-n+1)z^{X-n}]$. Ainsi: $P(X=n) = \frac{1}{n!} G_X^{(n)}(1)$ donc la fonction génératrice caractérise la loi.

Appl 24 bis: Formule de Wald

Déf 25: Soit X VA à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. La fonction caractéristique de X est $\phi_X: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ définie par: $\forall t \in \mathbb{R}^d, \phi_X(t) = E[e^{i\langle t, X \rangle}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} dP_X(x)$.

Prop 26: La fonction caractéristique caractérise la loi.

Prop 27: Soit X, Y des VA à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soit $X \perp Y$. Alors: $\forall t \in \mathbb{R}^d, \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$.

Exemple 28: Soit $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ avec $X \perp Y$, alors $X+Y \sim N(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$. Soit $X \sim \text{Can}(\lambda)$ et $Y \sim \text{Can}(\mu)$ avec $X \perp Y$, alors $X+Y \sim \text{Can}(\lambda+\mu)$.

III Indépendance et théorèmes limites

1) Lemme de Borel-Cantelli [CHA] [KUR] [DL]

Déf 29: Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements, on note $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Lemme 30 (de Borel-Cantelli 1): Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements tel que $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) < +\infty$. Alors $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$.

Remarque 31: Cela signifie que presque-sûrement, seul un nombre fini de A_n se réalisent.

Lemme 32 (de Borel-Cantelli 2): Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants tel que $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = +\infty$.

Alors: $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$.

Remarque 33: Cela signifie que presque-sûrement, A_n est réalisé pour une infinité de valeurs de n .

Prop 34: Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des VA réelles.

1) Si $\forall \varepsilon > 0, \sum_{n \in \mathbb{N}} P(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty$, alors $X_n \xrightarrow{P} X$.

2) Si les (x_n) sont indépendantes, alors $x_n \xrightarrow{P} 0$ si $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(|x_n| > \varepsilon) < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0$.

2) Loi des grands nombres [CHA]

Théorème 35 (loi faible des grands nombres): Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA réelles indépendantes de même loi. Soit $E[x_1] < +\infty$. Alors: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{P} E[x_1]$

Théorème 36 (loi forte des grands nombres): Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA indépendantes et de même loi. Soit $E[x_1] < +\infty$. Alors: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{P} E[x_1]$.

Corollaire 37: Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements indépendants de même probabilité, on a:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \xrightarrow{P} P(A_1)$$

Application 38: La moyenne empirique $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ est un estimateur sans biais et fortement convergent de $E[x_1]$.

3) Théorème central-limite [CHA][BER]

Théorème 39 (de Lévy): On a l'équivalence:

$$x_n \xrightarrow{L} X \iff \phi_{x_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$$

Théorème 40 (central-limite): Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA réelles indépendantes et de même loi, dans L^2 . Soit $\mu = E[x_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(x_1)$. Soit $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ et

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2)$$

Application 41: Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA de loi Bin (n, p) avec $p \in]0, 1[$. Alors:

$$\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{L} N(0, 1)$$

DEV 1

Application 42: Le TCL permet d'obtenir des intervalles de confiance. Par exemple, soit $x_1, \dots, x_n$ un n-échantillon de lois Bern(p) avec $p \in]0, 1[$. On peut alors déterminer un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour p.

Prop 43 (Delta-méthode): Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA réelles. Soit $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{n}(x_n - \theta) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2)$. Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en θ tel que $g'(\theta) \neq 0$. Alors $\sqrt{n}(g(x_n) - g(\theta)) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2 (g'(\theta))^2)$.

Lemme 44: Soit $X \sim \Gamma(r_1, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(r_2, \lambda)$ avec $X \perp Y$. Alors $X + Y \sim \Gamma(r_1 + r_2, \lambda)$.

Application 45: Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA indépendantes qui suivent la loi $E(1)$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Alors on étudie S_n , on en déduit la formule de Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

DEV 2

3