

60 Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

I. Variables aléatoires discrètes

1. Définition et premières propriétés [CHA]

VA, VA discrète, la loi est caractérisée par les singletons, exemple avec un dé

2. Lois discrètes usuelles [GOU] [KUR]

Loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson, loi de Poisson unique loi discrète sans mémoire, mise en situation pour chaque loi

3. Indépendance [GOU] [CHA]

VA discrètes indépendantes, VA discrètes mutuellement indépendantes, application à la somme de VA, exemples

II. Outils pour l'étude des variables aléatoires discrètes

1. Espérance et moments [GOU] [ELA]

Espérance, prop, cas de VA indépendantes, théorème de transfert, espérance d'une VA positive, inégalité de Markov, moment d'ordre p , variance, prop sur la variance, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

DEV 1 : théorème de Weierstrass

2. Fonction génératrice [CHA] [KUR]

Fonction génératrice, indépendance, G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$, moments de X , formule de Wald

III. Convergence en loi [KUR] [CHA]

Convergence en loi, fonction continue

DEV 2 : convergence d'une binomiale vers une Poisson

TCL, intervalle de confiance asymptotique, cas d'une suite de binomiale

Annexe :

- Lois discrètes usuelles [KUR]

Présentation :

- La loi de Poisson généralise la loi binomiale : on compte le nombre d'événements indépendants qui se produisent dans un intervalle de temps donné (par exemple le nombre de clients rentrant dans un magasin). On l'appelle aussi loi des événements rares.
- L'espérance donne la définition rigoureuse pour la notion intuitive de moyenne.
Pour mesurer la dispersion d'une VA autour de sa moyenne, on utilise la variance (et même l'écart type en général pour avoir la même dimension que X).
- On peut définir l'espérance pour des variables aléatoires positives, mais dans ce cas là cette espérance peut être infinie.
- La propriété de convergence en loi pour des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ reste vraie pour des VA à valeurs dans un ensemble dénombrable discret.

Développements :

- Théorème de Weierstrass par les probabilités
 - De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman, p195
 - Oraux X-ENS 6, FGN, p259
 - Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani, p158
- Convergence d'une loi binomiale vers une Poisson
 - De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzmann, p296

Références :

- [CHA] Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch
- [GOU] Algèbre-Probabilités, Gourdon
- [KUR] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman
- [ELA] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani

Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

I Variables aléatoires discrètes

1) Définition et premières propriétés [CHA]

Déf 1 : Une application mesurable $X: \Omega \rightarrow E$ est appelée variable aléatoire à valeurs dans E . Si $E \subset \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle.

Déf 2 : La loi d'une VA X est la même image de $\mathbb{P}$ par X . C'est donc la probabilité sur $(E, \mathcal{E})$, notée $\mathbb{P}_X$, définie par: $\forall B \in \mathcal{E}, \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\})$.

Déf 3 : Lorsque $X(\omega)$ est un ensemble fini on dit qu'on dénombre, on dit que X est une variable aléatoire discrète.

Prop 4 : La loi d'une variable discrète X est donnée par $\mathbb{P}_X = \sum_{x \in E} p_x \delta_x$ où $p_x = \mathbb{P}(X=x)$

La loi d'une VA discrète est donc caractérisée par les $\mathbb{P}(X=x)$ pour $x \in E$.

Exemple 5 : Si on lance deux dés, on peut définir la VA qui est égale à la somme des résultats des dés: $X(i,j) = i+j$. Ainsi X est à valeurs dans $\{2; \dots; 12\}$ et est une VA discrète.

2) Lois discrètes usuelles [GOU][KUR]

Soit X une variable aléatoire discrète.

Déf 6 : Si $X(\omega) \in \{1; \dots; n\}$, on dit que X suit une loi multinomiale si $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n} \forall k \in \{1; \dots; n\}$. On note $X \sim \mathcal{M}(n; \frac{1}{n})$.

Exemple 7 : La VA X qui donne le résultat du lancer d'un dé non truqué suit la loi $\mathcal{M}(6; \frac{1}{6})$.

Déf 8 : Soit $X(\omega) \in \{0; 1\}$. Soit $p \in [0; 1]$. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

On note $X \sim \text{Ber}(p)$.

Exemple 9 : Le résultat d'un pile ou face d'une pièce équilibrée suit la loi $\text{Ber}(\frac{1}{2})$.

Déf 10 : Soit $X(\omega) \in \{0; 1\}$ et $p \in [0; 1]$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) si pour tout $k \in \{0; \dots; n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On note $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

Exemple 11 : On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Le nombre X de "pile" obtenus suit la loi $\text{Bin}(n, \frac{1}{2})$.

Déf 12 : Soit $X(\omega) \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p si $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$. On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exemple 13 : On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à obtention du premier "pile". Le nombre de lancers effectués suit la loi $\mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

Déf 14 : Soit $X(\omega) \in \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ si $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Exemple 15 : La loi de Poisson modélise souvent le nombre de succès lorsque l'on répète un très grand nombre de fois une expérience ayant une chance très faible de succès.

Prop 16 : Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Alors X suit une loi géométrique ssi $\mathbb{P}(X=1) \in]0; 1[$ et X est sans mémoire, c'est-à-dire $\forall n, k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X > n+k | X > n) = \mathbb{P}(X > k)$.

3) Indépendance [GOU][CHA]

Déf 17 : Deux VA discrètes X et Y de Ω dans E sont dites indépendantes si pour tout $A \subset E$ et $B \subset E$, on a: $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B)$. On note $X \perp Y$.

Déf 18 : Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de VA discrètes de Ω dans E . On dit que les variables $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes si pour toute partie $J \subset I$, les X_i pour $i \in J$ sont indépendantes.

finie $\sum_{j \in I} x_j$ et toutes parties $(A_j)_{j \in I}$ avec $A_j \subset X_j$ on a : $P(\cap_{j \in I} \{x_j \in A_j\}) = \prod_{j \in I} P(x_j \in A_j)$.

Prop 19 : Soit VA discrètes X et Y sont indépendantes si : $V(x, y) \in X(n) \times Y(m)$, $P(x=x, y=y) = P(x=x) \cdot P(y=y)$.
Alors la loi de $X+Y$ est donnée par : $V \in m$, $P(X+Y=m) = \sum_{k=0}^m P(X=k) P(Y=m-k)$.

Exemple 21 : 1) $X \sim \text{Bin}(n, p)$ et $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ avec $X \perp Y$, alors $X+Y \sim \text{Bin}(n+m, p)$

2) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec $X \perp Y$ alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$
Exemple 22 : Si les $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi $\text{Poi}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, p)$.

II Outils pour l'étude des variables aléatoires discrètes

1) Espérance et moments [600] [ELA]

Soit X et Y des VA discrètes réelles sur $\mathbb{R}$.

Déf 23 : Si la somme $\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| P(x=x)$ est finie, on dit que X a une espérance et on note $E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(x=x)$ appelée l'espérance de X .

Remarque 24 : Si $A \subset \mathbb{R}$, on a $E[1_A] = P(A)$

Prop 25 : 1) $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

2) $E[\lambda X] = \lambda E[X]$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

3) Si $x \geq 0$, alors $E[x] \geq 0$

4) On a $|E[X]| \leq E[|X|]$

Prop 26 : Si X et Y sont indépendantes, alors XY a une espérance et $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$.

Théorème 27 (de transfert) : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $f(X)$ a une espérance si : $\sum_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \cdot P(x=x) < +\infty$ et

alors : $E[f(X)] = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot P(x=x)$.

Prop 28 : Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$. Si X a une espérance, alors $E[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

Prop 29 (Inégalité de Markov) : Soit X admettant une espérance. Alors : $\forall \epsilon > 0$, $P(|X| > \epsilon) \leq \frac{E[|X|]}{\epsilon}$.

Déf 30 : Soit $p \in \mathbb{N}^+$. On dit que X a une moment d'ordre p si X^p a une espérance. Le moment d'ordre p de X est alors : $E[X^p] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^p \cdot P(x=x)$.

Déf 31 : Soit $E[|X|] < +\infty$. On appelle variance de X la quantité $\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$.

Prop 32 : Soit $E[|X|] < +\infty$. Alors :

1) $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$.

Prop 33 : Si X et Y sont indépendantes et a deux moments d'ordre 2, alors $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

Prop 34 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) : Soit X admettant un moment d'ordre 2. Soit $\epsilon > 0$. Alors :

$$P(|X - E[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \text{Var}(X)$$

Déf 35 : Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle n -ième polynôme de Bernstein associé à f le polynôme :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{pour } x \in [0, 1]$$

Prop 36 : Soit f continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La suite $(B_n)_n$ de polynômes de Bernstein associés à f converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. DEV 1

Théorème 37 (de Weierstrass) : Toute fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales. 2

2) Fonction génératrice [CHA] [KUR]

Déf 38: Soit X une VA à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice de X est la série entière définie par:

$$G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) z^k \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1$$

Théorème 39: G_X est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ et on a que:

$$G_X^{(n)}(z) = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-n+1)z^{X-n}]$$

Ainsi: $\mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{n!} G_X^{(n)}(0)$ donc la fonction génératrice caractérise la loi.

Prop 40: Si $X \perp Y$, alors: $G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$.

Remarque 41: On retrouve que si $X \perp Y$ avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Prop 42: G_X est m fois dérivable à gauche en 1 si X admet un moment d'ordre m et alors:

$$G_X^{(m)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-m+1)]$$

En particulier: $G_X'(1) = \mathbb{E}[X]$ $G_X''(1) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]$ donc $\text{Var}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$.

Théorème 43 (formule de Wald): Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA i.i.d à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit N une VA à valeurs dans $\mathbb{N}^+$ indépendante des X_i . Soit $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$.

$$\text{Alors on a: } G_{S_N}(z) = G_N \circ G_{X_1}(z)$$

Ainsi si X_1 et N admettent une espérance, S_N aussi et: $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_1]$.

III Convergence en loi [KUR] [CHA]

Soit $(X_n)_n$ une suite de VA réelles et X une VA réelle.

Déf 44: On dit que (X_n) converge en loi vers X si pour toute fonction f continue bornée, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]. \quad \text{On note } X_n \xrightarrow{\text{loi}} X.$$

Prop 45: Soit g une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$. Si $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$, alors $g(X_n) \xrightarrow{\text{loi}} g(X)$.

Lemme 46 (de Scheffé): Soit $f, g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ les applications intégrables par rapport à μ où $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré. On suppose que $f_n \rightarrow f$ μ -pp et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{R}} f_n d\mu = \int_{\mathcal{R}} f d\mu$. Alors $f_n \xrightarrow{L^1} f$, c-à-d $\int_{\mathcal{R}} |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Corollaire 47: Soit x et $(X_n)_{n \geq 1}$ des VA sur $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, \mu)$ admettant les densités f et $(f_n)_{n \geq 1}$ par rapport à μ . On suppose que $f_n \rightarrow f$ μ -pp. Alors: $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$.

Prop 48: Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des VA à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k) \quad \forall k \in \mathbb{R}$, alors $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$.

Application 49: Soit $n \geq 1$. Soit $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot p_n = \lambda > 0$. Alors (X_n) converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ .

DEV 2

Théorème 50 (central-limite): Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA indépendantes de même loi, dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$. Soit $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Alors:

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Corollaire 51: Sous les mêmes hypothèses et avec $n > 0$, on a:

$$\mathbb{P}\left(\mu \in \left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

Cela permet de construire des intervalles de confiance asymptotique pour μ .

Corollaire 52: Soit $(S_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA de loi Bin (n, p) . Alors la suite $Y_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers X où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

ANNEXE

Lois discrètes usuelles [kur]

Loi	Distribution	Espérance	Variance	Fonction génératrice	$G_X(z)$
$M(n, p, D)$	$\forall h \in \mathbb{Z}^+, \sim D,$ $P(X=h) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$		$\frac{z}{n} \cdot \frac{1-z^n}{1-z} \quad (z \neq 1)$
$Be(p)$	$P(X=1) = p$ $P(X=0) = 1-p$	p	$p(1-p)$		$(1-p) + pz$
$Bin(n, p)$	$\forall h \in \mathbb{Z}^+, \sim D,$ $P(X=h) = \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h}$	np	$np(1-p)$		$((1-p) + pz)^n$
$\mathcal{G}(p)$	$\forall h \in \mathbb{N}^+,$ $P(X=h) = p(1-p)^{h-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$		$\frac{pz}{1-(1-p)z}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\forall h \in \mathbb{N}^+,$ $P(X=h) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^h}{h!}$	λ	λ		$e^{-\lambda} (1-z)$