

58 Leçon 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

I. Loi d'une variable aléatoire

1. Premières définitions [CHA]

Variable aléatoire, loi d'une VA, VA discrète, caractérisation par les singletons, VA à densité

2. Vecteurs aléatoires et indépendance [CHA]

Loi jointe, lois marginales dans le cas discret/à densité, VA indépendantes, caractérisation de l'indépendance, cas discret/à densité, somme de VA indépendantes, exemples

II. Caractérisation de la loi par des fonctions

1. Fonctions test [CHA]

Espérance, théorème de transfert, fonctions test

2. Fonction de répartition [CHA] [BL]

Fonction de répartition, propriétés, sauts de F_X , points de discontinuité, F_X caractérise la loi

3. Fonction génératrice [CHA] [KUR]

Fonction génératrice, G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$, indépendance, exemple, moments de X

4. Fonction caractéristique [CHA] [KUR] [IP]

Fonction caractéristique, prop sur Φ , Φ caractérise la loi, cas d'indépendance, lien avec les moments, [DEV 1 : fonction caractéristique de la Gamma](#)

III. Convergence en loi

1. Définition et premières propriétés [KUR]

Convergence en loi, fonction continue, lemme de Scheffé, corollaires, cas de la binomiale, équivalence de la CV en loi avec la fonction de répartition

2. Théorème central-limite [CHA]

Théorème de Lévy, théorème central-limite, [DEV 2 : formule de Stirling avec le TCL](#), intervalles de confiance asymptotique

Présentation :

- La technique des fonctions test est très utilisée en pratique pour connaître la loi d'une variable aléatoire, notamment pour des VA à densité car il s'agit simplement d'un changement de variable dans l'intégrale.
- On peut voir la fonction caractéristique comme la transformée de Fourier de la densité (dans le cas d'une VA à densité) à un signe près en fonction des conventions. Cela permet d'appliquer certains théorèmes, par exemple l'injectivité de la transformée de Fourier.
- Pour les variables aléatoires discrètes, on déduit leur fonction caractéristique directement de leur fonction génératrice en prenant $z = e^{it}$.

Développements :

- Fonction caractéristique et moments de la loi Gamma

- L'Oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann et Pecatte, p453
- Exercices de probabilités, Cottrell and co, p121
- Formule de Stirling avec le TCL
- De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzmann, p180-314-556

Références :

- [CHA] Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch
- [BL] Probabilités, Barbe-Ledoux
- [KUR] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman
- [IP] L'oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann-Pecatte

Devoir 261: Loi d'une variable aléatoire : caractériser, exemples, applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

I Loi d'une variable aléatoire

1) Premières définitions [CHA]

Déf 1: Une application mesurable $X: \Omega \rightarrow E$ est appelée variable aléatoire à valeurs dans E . Si $E \subset \mathbb{R}^n$, on parle de variable aléatoire réelle.

Exemple 2: Si on lance 2 dés, on peut définir X la VA qui est égale à la somme des résultats: $X((i,j)) = i+j$. Ici $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ et $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$.

Déf 3: La loi d'une variable aléatoire $X: \Omega \rightarrow E$ est la mesure-image de $\mathbb{P}$ par X . C'est donc la probabilité sur $(E, \mathcal{E})$, notée $\mathbb{P}_X$, définie par: $\forall B \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\})$$

Déf 4: Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable, on dit que X est une VA discrète.

Prop 5: La loi d'une VA discrète X est donnée par

$$\mathbb{P}_X = \sum_{x \in E} \mathbb{P}_X(x) \delta_x \text{ où } \mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X=x).$$

La loi d'une VA discrète est donc caractérisée par les

$$\mathbb{P}(X=x) \text{ pour } x \in E.$$

Déf 6: Une VA X à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est dite continue s'il existe $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ bornée telle que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B f(x) dx. \text{ Ainsi } \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = 1.$$

Prop 7: Si X est une VAR à densité, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{P}(x \leq X \leq x) = \int_x^x f(x) dx. \text{ Et } \forall x \in \mathbb{R}^d, \mathbb{P}(X=x) = 0.$$

2) Variables aléatoires et indépendance [CHA]

Soit X, Y deux VA définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E_1, \mathcal{E}_1)$

et $(E_2, \mathcal{E}_2)$.

Déf 8: La loi jointe du couple (X, Y) est la probabilité, notée $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ tel que: $\mathbb{P}_{(X,Y)}(B) = \mathbb{P}((X,Y) \in B) \quad \forall B \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$

Remarque 9: Si on connaît la loi du couple (X, Y) , on peut trouver les lois marginales de X et de Y .

• Si X et Y sont discrètes: $\mathbb{P}(X=x) = \sum_{y \in E_2} \mathbb{P}(X=x; Y=y)$

• Si (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+m}$ est à densité $f(x, y)$, la densité de X est: $\forall x \in \mathbb{R}^n, f_X(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy$.

Remarque 10: On ne peut pas forcément trouver la loi jointe à partir des lois marginales.

Déf 11: On dit que les VA $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si: $\forall F_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, \forall F_n \in \mathcal{E}_n, \text{ on a:}$

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in F_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in F_n\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in F_i)$$

Théorème 12: Soit $X_1, \dots, X_n$ des VA à valeurs dans $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$. Alors $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si:

$$\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}.$$

Prop 13: Si X et Y sont discrètes, elles sont indépendantes

ssi: $\forall (x_1, y) \in E_1 \times E_2, \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x) \cdot \mathbb{P}(Y=y).$

Prop 14: Soit $X_1, \dots, X_n$ des VA à densité à valeurs réelles. Elles sont indépendantes ssi: $f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i).$

Prop 15: Soit $X \perp Y$. Alors la loi de $X+Y$ est $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$. Ainsi: 1) Si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X=k) \mathbb{P}(Y=n-k)$$

2) Si X a une densité f_X et Y a une densité f_Y , alors $X+Y$ a une densité f définie par: $\forall z \in \mathbb{R}$,

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

Exemple 16: • Si $X \sim \text{Bin}(n, p)$ et $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ avec $X \perp Y$, alors $X+Y \sim \text{Bin}(n+m, p)$.

• Si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(b, \lambda)$ et $X \perp Y$, alors $X+Y \sim \Gamma(a+b, \lambda)$

II Caractérisation de la loi par des fonctions

1) Fonctions test [CHA]

Déf 17: Soit X une VAR intégrable. On appelle espérance de X

la quantité: $E[X] = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x)$

Théorème 18 (de transfert): Soit X une VA à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$. Pour toute fonction mesurable $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, on a: $E[f(X)] = \int_E f(x) dP_X(x)$.

Prop 19: Soit X une VAR. Si pour toute fonction continue bornée $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on a $E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x)$, alors $P_X = \mu$. Cela est appelé la technique des fonctions test.

2) Fonction de répartition [CHA][BL]

Déf 20: Soit X une VAR. La fonction de répartition de X est la fonction $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par: $\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = P(X \leq t)$.

Prop 21: Si X est à densité, de densité f_X continue, alors F_X est une primitive de f_X et donc $f_X = F_X'$.

Prop 22: On a que F_X est croissante, continue à droite, tend vers 0 en $-\infty$ et tend vers 1 en $+\infty$.

Remarque 23: Les sauts de F_X correspondent aux atomes de P_X . Ainsi une VA à densité aura une fonction de répartition continue, alors que celle d'une VA discrète sera en escalier.

Prop 24: L'ensemble des points de discontinuité de F_X est au plus dénombrable.

Exemple 25: Si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, alors $F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \forall t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

Prop 26: La fonction de répartition caractérise la loi: $F_X = F_Y$ si $P_X = P_Y$.

3) Fonction génératrice [CHA][KUR]

Déf 27: Soit X une VA à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice de X est la série entière définie par:

$$G_X(z) = E[z^X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X=k) z^k \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1$$

Théorème 28: G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ avec:

$$G_X^{(n)}(z) = E[X(X-1)\dots(X-n+1)z^{X-n}]$$

Ainsi: $P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$ donc la fonction génératrice caractérise la loi.

Prop 30: Si $X \perp Y$, alors $G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$.

Exemple 31: Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec $X \perp Y$, alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Prop 32: G est un polynôme dérivable à gauche en 1. Soit X un moment d'ordre m , on a alors: $G_X^{(m)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-m+1)]$. En particulier: $G_X'(1) = E[X]$ et $G_X''(1) = E[X^2] - E[X]$ donc $\text{Var}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$.

4) Fonction caractéristique [CHA][KUR][IP]

Déf 33: Soit X une VA réelle. La fonction caractéristique de X est: $\phi_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $t \mapsto E[e^{itX}]$

Prop 34: $\phi_X(0) = 1$ et $|\phi_X(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. ϕ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 35: La fonction caractéristique caractérise la loi:

$P_X = P_Y$ si: $\phi_X = \phi_Y$. **Prop 36:** Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors: $\phi_{aX+b}(t) = \phi_X(at)$ et $\phi_{X+b}(t) = e^{itb} \phi_X(t)$.

Prop 37: Si $X \perp Y$, alors $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$.

Prop 38: Si X admet un moment d'ordre m , alors ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^m$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $h \leq m$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X^{(h)}(t) = i^h E[X^h e^{itX}]$. Donc: $E[X^h] = (-i)^h \phi_X^{(h)}(0)$.

Application 39: La fonction caractéristique de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est $t \mapsto \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^a$

Corollaire 40: Si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, $E[X^n] = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{\lambda^n}$

III Convergence en loi

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ et x des VA réelles.

1) Définition et premières propriétés. [KUR]

Def 41: On dit que (x_n) converge en loi vers x si pour toute fonction continue bornée f , on a : $E[f(x_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(x)]$.

On note $x_n \xrightarrow{\text{loi}} x$.

Prop 42: Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $x_n \xrightarrow{\text{loi}} x$, alors

$$g(x_n) \xrightarrow{\text{loi}} g(x).$$

Lemme 43 (de Scheffé): Soit $f, g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ des applications intégrables par rapport à μ tel que: $f_n \rightarrow f$ p.p et

$$\lim \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu. \text{ Alors } f_n \xrightarrow{L^1} f, \text{ c'éd } \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$$

Corollaire 44: Soit x et (x_n) des VA sans (a, t, μ) admettant des densités f et $(f_n)_{n \geq 1}$ par rapport à μ . On suppose que $f_n \rightarrow f$ p.p. Alors $x_n \xrightarrow{\text{loi}} x$.

Prop 45: Soit x et $(x_n)_{n \geq 1}$ des VA disjointes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que: $\forall h \in \mathbb{N}, P(x_n = h) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(x = h)$. Alors $x_n \xrightarrow{\text{loi}} x$.

Application 46: Soit $x_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$ pour $n \geq 1$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot p_n = \lambda > 0$. Alors $x_n \xrightarrow{\text{loi}} x$ où $x \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Théorème 47: On a équivalence entre:

- 1) $x_n \xrightarrow{\text{loi}} x$
- 2) $F_{x_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_x(x)$ en tout point x de continuité de F_x .

2) Théorème central-limite [CHA][KUR]

Théorème 48 (de Levy): $\forall_n$ suite $(x_n)_n$ converge en loi vers x ssi: $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{x_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_x(t)$.

Théorème 49 (central-limite): Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA réelles indépendantes de même loi, dans L^2 . Soit $\mu = E[x_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(x_1)$. Soit $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ et $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$. Alors:

$$\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu) = \frac{s_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} N(0, \sigma^2).$$

Corollaire 50: Soit $(s_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA de loi $\text{Bin}(n, p)$

Alors la suite $Y_n = \frac{s_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers x où $x \sim N(0, 1)$.

Application 51: En étudiant $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$ où les x_k sont I.I.D de loi $\text{Exp}(1)$, on en déduit la formule de Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

DEV 2

Corollaire 52: Sous les mêmes hypothèses que le TCL, et avec $n > 0$, on a:

$$P(\mu \in \left[\bar{x}_n - \frac{n\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + \frac{n\sigma}{\sqrt{n}} \right]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{-x^2/2} dx$$

Cela permet de construire des intervalles de confiance asymptotique pour μ .

ANNEXE

Lois discrètes usuelles KUR 137, 186, 236

Lois à densité usuelles KUR 144, 189, 247