

55 Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

I. Généralités sur les séries de Fourier

1. Classes de fonctions 2π -périodiques [ELA2]

Appli périodique, $\mathcal{C}_{2\pi}$, $L^p_{2\pi}$, propriétés

2. Polynômes et séries trigonométriques [ELA2] [GOU]

$(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ famille orthonormée, polynôme trigonométrique, série trigonométrique, CVN de la série trigonométrique

3. Coefficients et séries de Fourier [ELA2]

Coeff de Fourier exponentiel, produit de convolution, prop sur les coeff de Fourier, lemme de Riemann-Lebesgue, coeffs de Fourier réels, exemple avec une fonction, série de Fourier et suite des sommes partielles

II. Modes de convergence des séries de Fourier

1. Convergence au sens de Cesaro [ELA2]

Somme de Cesaro de la série de Fourier, CV au sens de Cesaro, noyau de Dirichlet, noyau de Fejér, DEV 1 : théorème de Fejér, corollaire sur la CVS, théorème de Weierstrass trigonométrique

2. Convergence en moyenne quadratique [ELA2]

$(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ base hilbertienne, théorème de Parseval, γ isomorphisme isométrique

3. Convergence ponctuelle et normale [ELA2] [GOU]

Théorème de Jordan-Dirichlet, exemple d'une série de Fourier, théorème sur la CVN

III. Applications au calcul de sommes [ELA2]

Exemples de sommes classiques, exemple de la cotangente, DEV 2 : calcul des $\xi(2k)$

Présentation :

- L'idée de départ des séries de Fourier est d'exprimer toute fonction périodique f comme somme trigonométrique en sinus et cosinus de même période T . En effet, les fonctions sinusoidales sont extrêmement régulières et bien connues, il est donc pertinent d'essayer de s'en rapprocher. Ces techniques ont été introduites par Fourier afin de résoudre l'équation de la chaleur.
- De nombreuses tentatives pour trouver les bonnes hypothèses de convergence ont eu lieu, mais c'est l'arrivée de l'intégrale de Lebesgue en 1904 qui a permis plusieurs avancées significatives.
- Les questions centrales de la théorie des séries de Fourier sont :
 - Pour quelles fonctions y a-t-il convergence de $S_N(f)$?
 - Et y a-t-il convergence vers f ?
 - De quel type de convergence ?
- La théorie des séries de Fourier dans le cadre L^2 est en fait une application de la théorie des espaces de Hilbert (les coefficients de Fourier correspondent au produit scalaire avec la base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$).
- Dans la partie sur la convergence en moyenne quadratique, ne pas oublier de mettre le fait que γ la fonction qui à f associe la suite des coeffs de Fourier, est un isomorphisme isométrique de $(L^2_{2\pi}, \|\cdot\|_2)$ dans $l^2(\mathbb{Z})$ (et le mentionner à l'oral cf rapport du jury).

Développements :

- Théorème de Féjer
- Analyse de Fourier, El Amrani, p181
- Calcul des $\xi(2k)$ avec les polynômes de Bernoulli
- Carnet de voyage en Analystan, Caldero, p107

Références :

- [ELA2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani
- [GOU] Analyse, Gourdon

Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications

I Généralités sur les séries de Fourier

1) Classes de fonctions 2π -périodiques [ELA2]

Déf 1 : Une application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite périodique si il existe $T > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$

Remarque 2 : Si f est T -périodique, on peut se ramener à une fonction 2π -périodique $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$.

Déf 3 : On note $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques. On le munit de $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, ce qui en fait un espace de Banach.

Déf 4 : On note $L_{2\pi}^p$ l'espace des classes de fonctions 2π -périodiques et dans L^p muni de $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$

Prop 5 : On a : $C_{2\pi} \subset L_{2\pi}^\infty \subset L_{2\pi}^p \subset L_{2\pi}^1$

Prop 6 : $C_{2\pi}$ est dense dans $L_{2\pi}^p$ pour $p \in [1, +\infty[$

Prop 7 : $(L_{2\pi}^p, \|\cdot\|_p)$ est complet pour tout $p \in [1, +\infty]$, et $(L_{2\pi}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert (où $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$)

2) Polynômes et séries trigonométriques [ELA2] [Gou]

Déf 8 : $\forall n \in \mathbb{Z}$, on note e_n l'élément de $C_{2\pi}$ donné par $e_n(x) = e^{inx}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Prop 9 : La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthogonale de $L_{2\pi}^2$ appelé système trigonométrique.

Déf 10 : On appelle polynôme trigonométrique de degré $\leq N$ ($N \in \mathbb{N}$), noté P_N , toute fonction de la forme $x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n e_n(x)$ avec $c_n \in \mathbb{C}$.

Remarque 11 : $P_N = 0$ ssi $c_n = 0$ pour tout n

Déf 12 : On appelle série trigonométrique une série de fonctions de la forme $x \mapsto c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

On la note $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$

Remarque 13 : La série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge ssi la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right)_N$ converge.

Prop 14 : Si $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |c_{-n}|$ convergent, la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. La somme définit une fonction continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

3) Coefficients et séries de Fourier [ELA2]

Déf 15 : Soit $f \in L_{2\pi}^1$ et $m \in \mathbb{Z}$. On appelle m -ième coefficient de Fourier exponentiel le nombre complexe $c_m(f)$ tel que : $c_m(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx$

Remarque 16 : pour $f \in L_{2\pi}^2$, $c_m(f) = \langle f, e_m \rangle$

• Si f est un polynôme trigonométrique, alors $c_m = c_m(f)$

Déf 17 : Soit $f, g \in L_{2\pi}^1$. On définit le produit de convolution $f * g$ au point x , quand il existe, par : $f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) dt$

Prop 18 : Soit $f \in L_{2\pi}^1$, $a \in \mathbb{R}$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Alors :

• $c_n(f \sigma) = c_n(f)$ où $f \sigma(x) = f(-x)$

• $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$

• $c_n(\tau_a f) = e^{-ina} c_n(f)$ où $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$

• $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f) e_n$ • $f * e_n = c_n(f) e_n$

• Si de plus $f \in C_{2\pi}$ et est e^1 par morceaux, $c_n(f') = im c_n(f)$

Lemme 19 (de Riemann-Lebesgue) : Si $f \in L_{2\pi}^1$, alors

$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ix} dx = 0$

Corollaire 20 : pour $f \in L_{2\pi}^1$, on a $\lim_{|n| \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$

Prop 21 : L'application $\gamma: (L_{2\pi}^1, \|\cdot\|_1) \rightarrow (C_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$

tel que $\sigma(f) = (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une application linéaire continue de même type.

Corollaire 20 bis: Soit f de classe C^k et 2π -périodique.

Alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ quand $|n| \rightarrow +\infty$.

Déf 22: Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On définit les coefficients de Fourier

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Prop 23: En posant $b_0(f) = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad \text{et} \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

Prop 24: Si f est paire, $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$ et $b_n(f) = 0$

Si f est impaire, $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$

Exemple 25: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique tel que

$$\forall x \in [-\pi; \pi], \quad f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}$$

$$\text{Alors } c_0(f) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad c_n(f) = \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2 \pi^2} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*$$

$$\text{Et } a_0(f) = \frac{4}{3}, \quad a_n(f) = \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2 \pi^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad b_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Déf 26: Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On appelle série de Fourier de f la

série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ où $c_n(f)$ sont les

coefficients de Fourier de f .

On note $S_N(f): x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$ la N -ième somme partielle

symétrique de la série de Fourier de f .

II Modes de convergence des séries de Fourier

1) Convergence au sens de Cesàro [ELA2]

Déf 27: Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On note $\sigma_N(f)$ la N -ième somme

de Cesàro de la série de Fourier de f : $\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(f)$

Déf 28: On dit que la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ converge au

sens de Cesàro au point x_0 si $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f)(x_0)$ existe.

Déf 29: On appelle moyen de Dirichlet d'ordre N la

$$\text{fonction } D_N: x \mapsto \sum_{n=-N}^N e^{inx}$$

Prop 30: 1) D_N est une fonction paire, 2π -périodique et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi D_N(x) dx = 1$

2) D_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction

$$\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}$$

3) Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a: $S_N(f) = f * D_N$

Déf 31: On appelle moyen de Fejér d'ordre N la fonction

$$K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$$

Prop 32: Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On a: $K_N = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{inx}$,

$$\|K_N\|_1 = 1 \quad \text{et} \quad \sigma_N(f) = f * K_N$$

Théorème 33 (de Fejér): 1) Si $f \in L^1_{2\pi}$ alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

et $\sigma_N(f)$ CVU vers f . DEV 1

2) Si $f \in L^p_{2\pi}$ pour $p \in [1, +\infty[$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$

et $\sigma_N(f)$ converge vers f pour $\|\cdot\|_p$.

Corollaire 34: Soit $f \in L^p_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si la suite

$$(S_N(f)(x_0))_N \text{ CVS dans } \mathbb{R}, \text{ alors pour tout } x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx}$$

de plus si $(S_N(f))_N$ CVS dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx}$$

Corollaire 35: Les polynômes trigonométriques sont denses dans

$$(L^p_{2\pi}, \|\cdot\|_p) \quad \text{et} \quad (L^p_{2\pi}, \|\cdot\|_p)$$

Corollaire 36: La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base

hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Théorème 37 (de Weierstrass): Toute fonction continue sur

un intervalle compact $[a, b]$ est limite uniforme sur

$[a, b]$ d'une suite de polynômes.

2) Convergence en moyenne quadratique [ELA2]

Théorème 38 (Parseval): Soit $f \in L^2_{2\pi}$. Alors:

1) $(S_N(f))_N$ converge vers f en moyenne quadratique:

$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$, où $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ dans $L^2_{2\pi}$

2) On a : $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$

Corollaire 39: L'application $\mathcal{F}$ (cf prop 29) est un isomorphisme isométrique de $(L^2_{2\pi}, \|\cdot\|_2)$ dans $l^2(\mathbb{Z})$.

3) Convergence ponctuelle et normale [ELA2] [GOU]

Théorème 40 (de Jordan-Dini): Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existent, et que $f'(x_0^-)$ et $f'(x_0^+)$ existent aussi.

Alors : $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$

Corollaire 41: Si f est 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge en ce point x vers $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. En particulier, si f est continue en x , sa série de Fourier en x (v vers $f(x)$).

Remarque 42: Il existe des fonctions 2π -périodiques et continues tel que la série de Fourier diverge.

Exemple 43: En reprenant la fonction de l'exemple 25, On a : $\forall x \in [-\pi; \pi]$, $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$

Théorème 44: Si $f \in L^1_{2\pi}$ et est C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f CVN vers f sur $\mathbb{R}$.

III Applications

1) Calcul de sommes [ELA2]

Application 45: Grâce à l'exemple 25, on obtient que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} ; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} ; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Application 46: Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En considérant la fonction 2π -périodique $f(x) = \cos(x)$ sur $[-\pi; \pi]$, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \cos(n\pi) = \frac{1}{n} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2m}{n^2 - m^2} \pi^2$$

Application 47: pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$$

où b_{2k} est le $2k$ -ième membre de Bernoulli

2) Formule sommatoire de Poisson [GOU]

Théorème 48 (formule de Poisson): Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $f(x) = O(\frac{1}{x})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{x^2})$ quand $|x| \rightarrow +\infty$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{2i\pi m x}$$

$$\text{où } \hat{f}(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi m t} dt$$

Application 49 (Identité de Jacobi):

$$\forall s > 0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \frac{k^2}{s}}$$