

54 Leçon 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

I. Régularité des fonctions à variables complexes

1. Fonctions holomorphes [QUE] [TAU]

Fonction holomorphe, stabilité de l'holomorphie, conditions de Cauchy-Riemann

2. Fonctions analytiques [TAU] [LES]

Fonction DSE, fonction analytique, $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$

DEV 1 : prolongement analytique et principe des zéros isolés, $\mathcal{A}(\Omega)$ est intègre

II. Holomorphie et intégration

1. Intégration le long d'un chemin [TAU] [QUE]

Arc, chemin, intégrale le long d'un chemin, majoration de l'intégrale, cas de la dérivée, indice d'un point

2. Théorie de Cauchy et conséquences [TAU]

Théorème de Cauchy, formule de Cauchy, $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{A}(\Omega)$, formule de Cauchy avec les dérivées, inégalités de Cauchy, théorème de Liouville, théorème de d'Alembert-Gauss

3. Intégrales à paramètres [BMP] [IP]

Holomorphie sous le signe intégrale, exemple de la transformée de Fourier d'une gaussienne

DEV 2 : fonction caractéristique et moments de la loi $\Gamma(r, \lambda)$

III. Fonctions méromorphes

1. Singularités [QUE]

Singularité effaçable, pôle d'ordre m , fonction méromorphe, calcul du résidu d'un pôle simple

2. Théorème des résidus [TAU]

Théorème des résidus, exemple, fonction caractéristique de la loi de Cauchy, intégrale de Dirichlet

Présentation : regarder BMP

- Le principe du prolongement analytique est très puissant : il dit que le comportement d'une fonction analytique dans un disque arbitrairement petit détermine complètement cette fonction.
- Le théorème des zéros isolés nous dit qu'une fonction analytique sur un ouvert connexe ne peut pas s'annuler sur une suite de points situés dans Ω et possédant un point d'accumulation dans Ω , sauf si elle est identiquement nulle.
- L'indice de γ par rapport à z compte le nombre de tours orientés que fait γ autour de z .
- La formule de Cauchy permet de relier les dérivées de f avec f elle-même. Ainsi « contrôler » f permet de contrôler ses dérivées. Cela permet notamment de comprendre les hypothèses dans le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.
- On obtient le résultat remarquable suivant : une fonction est holomorphe si et seulement si elle est développable en série entière. Ainsi une fonction holomorphe (donc qui est une fois $\mathbb{C}$ -dérivable) est de classe C^∞ , et il suffit qu'elle soit indéfiniment dérivable (au sens complexe) pour être analytique. Ce résultat n'est pas vrai pour des fonctions réelles.

- Le théorème des résidus généralise la formule de Cauchy. Il permet de remplacer le calcul d'une intégrale par le calcul du coefficient a_{-1} et d'un indice. Ce théorème est crucial et admet de nombreuses applications.

Développements :

- Principe du prolongement analytique et théorème des zéros isolés
 - Topologie générale et espaces normés, Hage Hassan, p233
 - Variables complexes, Lesfari, p62
 - Analyse complexe pour la Licence 3, Tauvel, p52
- Fonction caractéristique et moments de la loi Gamma
 - L'Oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann et Pecatte, p453
 - Exercices de probabilités, Cottrell and co, p121

Références :

- [QUE] Analyse complexe et applications, Queffélec
- [TAU] Analyse complexe pour la Licence 3, Tauvel
- [LES] Variables complexes, Lesfari
- [BMP] Objectif Agrégation, Beck-Malick-Peyré
- [IP] L'oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann-Pecatte

Leçon 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

I Régularité des fonctions à variables complexes

1) Fonctions holomorphes [CAVE] [TAU]

Déf 1: Soit $a \in \Omega$. On dit que f est holomorphe en a s'il existe un complexe $f'(a)$ tel que

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \text{ Cette limite s'appelle la dérivée de } f \text{ en } a.$$

Déf 2: On dit que f est holomorphe sur Ω si elle est holomorphe en tout point de Ω . On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble de ces fonctions.

Exemple 3: $z \mapsto z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

$z \mapsto \bar{z}$ n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

Prop 4: $\mathcal{H}(\Omega)$ est une algèbre sur $\mathbb{C}$.

Soit Ω_1 un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ avec $f(z) = g(z)$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega_2)$, alors $g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Théorème 5: Soit $z = x + iy$ et $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. On a équivalence entre:

- $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
- f est différentiable sur Ω (on cone un ouvert de $\mathbb{R}^2$) et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial f}{\partial z} = 0$. Cette égalité est équivalente à:

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \quad \left(\begin{array}{l} \text{conditions de Cauchy-} \\ \text{Riemann} \end{array} \right)$$

Exemple 6: $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ et $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$ ne sont holomorphes en aucun point de $\mathbb{C}$.

Prop 7: Soit Ω un ouvert connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f' est identiquement nulle sur Ω , alors f est constante.

2) Fonctions analytiques [TAU] [LES]

Déf 8: Soit $z_0 \in \Omega$. On dit que f est développable en série entière au point z_0 s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ de rayon de convergence non nul, et un voisinage V de z_0 dans Ω tel que pour tout $z \in V$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Théorème 9: Soit $z_0 \in \Omega$ et $f \in \mathcal{D} \in \Omega$. Alors il existe un voisinage de z_0 sur lequel f est indéfiniment dérivable.

Déf 10: On dit que f est analytique dans Ω si elle est développable en série entière en tout point de Ω . On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble de ces fonctions.

Prop 11: On a $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$.

Théorème 12: Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. On a équivalence entre:

- $f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $f \equiv 0$ dans un voisinage de z_0
- f est nulle dans Ω .

Corollaire 13 (principe de prolongement analytique): Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$. Si $f = g$ sur un voisinage d'un point de Ω , alors $f = g$ sur tout Ω .

Théorème 14 (principe des zéros isolés): Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ non identiquement nulle. Alors les zéros de f sont isolés (si z_0 est un zéro de f , il existe un voisinage de z_0 ne contenant pas d'autres zéros que z_0).

Corollaire 15: Si Ω est un ouvert connexe, alors $\mathcal{A}(\Omega)$ est intègre.

DEV 1

Application 16: Soit $0 \in \Omega$. Il n'existe pas $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ tel que $f(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

II Holomorphie et intégration

1) Intégration le long d'un chemin [TAU] [QUE]

Déf 17: On appelle une toute application continue γ de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que $\gamma(a)$ est l'origine et $\gamma(b)$ est l'extrémité. On dit que γ est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$. On note $\text{Im}(\gamma)$ pour $\gamma([a, b])$.

Déf 18: On appelle chemin tout arc de classe C^1 par morceaux.

Exemple 19: Soit z_0 et $r > 0$. Le chemin fermé $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$; $t \mapsto z_0 + re^{it}$ est appelé le cercle de centre z_0 et de rayon r , parcouru dans le sens direct.

Déf 20: Soit γ un chemin et f continue sur $\text{Im}(\gamma)$. L'intégrale de f le long de γ est définie par:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Prop 21: Soit γ un chemin de longueur $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

Alors: $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \text{Im}(\gamma)} |f(z)| \times L(\gamma)$.

Prop 22: Soit γ un chemin, $f \in \mathcal{H}(r)$ avec $\text{Im}(\gamma) \subset r$ et f' continue sur $\text{Im}(\gamma)$. Alors:

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Théorème 23: Soit γ un chemin fermé et $U = \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$. Pour $z \in U$, on pose: $\text{ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z - \tau} d\tau = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$

L'application $U \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \text{ind}_{\gamma}(z)$ est $\mathbb{Z}$ -valued dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de U , et nulle sur la composante connexe non bornée de U . On dit que $\text{ind}_{\gamma}(z)$ est l'indice de γ par rapport à z .

2) Théorie de Cauchy et conséquences [TAU]

Théorème 24: Soit f continue sur r . On a équivalence entre:

- 1) f possède une primitive dans r .
- 2) pour tout chemin fermé γ dans r , $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Théorème 25 (de Cauchy): Soit r un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $w \in r$ et f continue sur r et holomorphe sur $r \setminus \{w\}$. Alors f possède une primitive dans r et pour tout chemin fermé γ dans r , on a: $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Théorème 26 (formule de Cauchy): Soit γ chemin fermé dans r convexe. Soit $z \in r \setminus \text{Im}(\gamma)$ et $f \in \mathcal{H}(r)$. Alors:
$$f(z) \cdot \text{ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Théorème 27: Soit $a \in r$ et $f \in \mathcal{H}(r)$. Alors:

- 1) $f \in \mathcal{H}(r)$
- 2) Si r est convexe et γ chemin fermé dans r tel que $a \in \text{Int}(\gamma)$, on a: $f^{(n)}(a) \cdot \text{ind}_{\gamma}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Contre-ex 28: Le théorème est faux pour les fonctions réelles. Prendre $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Alors f est de classe C^{∞} en 0 mais n'est pas différentiable.

Prop 29 (intégrales de Cauchy): Soit $f \in \mathcal{H}(D(0, R))$ avec $R > 0$ tel que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\forall z \in D(0, R)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $R \leq t$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a:

$$|a_m| = \frac{1}{m!} |f^{(m)}(0)| \leq \frac{1}{m!} \sup_{|z|=r} |f(z)|, \quad |z|=r$$

Corollaire 30 (théorème de Liouville): Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ est bornée, alors f est constante.

Corollaire 31 (théorème de l'Alent - Gauss): $\mathbb{C}$ est algébriquement clos: tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1 a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

3) Intégrale à paramètre [BMV][IP]

Théorème 32 (holomorphie sous le signe intégrale): Soit (x, y, z) un espace mesuré et Ω ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$. On pose: $F(z) = \int_X f(z, x) d\mu(x) \quad \forall z \in \Omega$. On suppose que:

- $\forall z \in \Omega, x \mapsto f(z, x)$ est mesurable.
- $\mu(\Omega) < \infty, z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur Ω .
- $\forall K$ compact de Ω , il existe $g \in L^1(X)$ tel que $|f(z, x)| \leq g(x) \quad \forall z \in K, x \in X$.

Alors F est holomorphe sur Ω et $\forall z \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, x) d\mu(x).$$

Application 33: La transformée de Fourier $\hat{f}$ de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x) dx$ est égale à: $\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$.

Application 34: Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\Gamma(n, \lambda)$ avec $n, \lambda > 0$. Alors la fonction caractéristique de X , définie par $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] \quad \forall t \in \mathbb{R}$, vaut:

$$\phi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^n \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

DEV 2

Corollaire 35: Si $X \sim \Gamma(n, \lambda)$ alors X admet des moments de tout ordre et $\mathbb{E}[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n} (n-1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

III Fonctions méromorphes

1) Singularités [AVE]

Déf 36: Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. On dit que a est une singularité éliminable pour f si f se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de a .

Déf 37: Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. On dit que a est un pôle d'ordre m pour f s'il existe $c_1, \dots, c_m$ avec $c_m \neq 0$ tel que $f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k} + g(z)$ où g est holomorphe en a . Le coefficient c_m s'appelle le résidu de f en a , noté $\text{Res}(f, a)$.

Exemple 38: $f(z) = \frac{e^z}{z}$ a un pôle d'ordre 1 en 0 avec $\text{Res}(f, 0) = 1$.

Déf 39: On dit que f est méromorphe sur Ω s'il existe

- $A \subset \Omega$ tel que:
- A n'a que des points isolés dans Ω .
 - $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ 3) f a un pôle en chaque point de A .

On note $M(\Omega)$ l'ensemble de ces fonctions.

Prop 40: Soit $f = \frac{g}{h}$ où g, h sont holomorphes au voisinage de $a \in \Omega$. On suppose que a est un zéro simple de h et que $g(a) \neq 0$. Alors a est un pôle simple de f et $\text{Res}(f, a) = \frac{g'(a)}{h'(a)}$.

2) Théorème des résidus [TAU]

Théorème 41 (des résidus): Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a_1, \dots, a_n$ des points distincts de Ω et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f . Soit γ un chemin fermé dans Ω dont l'image ne contient aucun des a_k . Alors:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{ind}_{\gamma}(a_k) \cdot \text{Res}(f, a_k).$$

Exemple 42: Soit $n > 1$. Soit $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos(t)}$.

Alors: $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

Application 43: Soit X une VA qui suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(a)$. Alors $\phi_X(t) = e^{-a|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Application 44 (intégrale de Dirichlet): En considérant la fonction $f: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z} e^{-z}$ et un contour bien choisi,

On peut montrer que: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.