

53 Leçon 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications

I. Généralités

1. Série entière et rayon de convergence [GOU] [ELA]

Série entière, somme, lemme d'Abel, rayon de CV, CVN sur tout compact

2. Calcul du rayon de convergence [ELA]

Règle de d'Alembert, formule de Hadamard, règle de Cauchy, comparaisons de séries

3. Opérations sur les séries entières [ELA]

Séries somme et produit

II. Propriétés de la somme

1. Continuité [ELA]

Continuité de la somme, DL en zéro

2. Intégration [ELA]

Echange série-intégrale, primitives de la somme

3. Dérivabilité [TAU]

SE dérivée, dérivabilité de la somme, S est $\mathcal{C}^\infty$, expression des coefficients

DEV 1 : Nombres de Bell

III. Fonctions développables en série entière

1. Sur $\mathbb{C}$ [TAU]

DSE, prop fonction DSE en 0

2. Sur $\mathbb{R}$ [ELA]

DSE $\Rightarrow \mathcal{C}^\infty$ + contre exemple, reste qui tend vers 0, condition nécessaire pour être DSE

Annexe avec les DSE usuels en zéro

IV. Applications

1. Equations différentielles [ELA]

Méthode pour résoudre des équa diff, DEV 2 : équation de Bessel

2. Fonction génératrice en probabilités [CHA] [KUR]

Fonction génératrice, indépendance, G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$, moments de X , formule de Wald

Annexe :

Développements en série entière usuels [ELA]

Présentation :

- Les séries entières sont des types particuliers de séries de fonctions, qui ont des propriétés remarquables. L'idée est de généraliser les développements limités.
- Dans la partie sur l'intégration, on regarde que sur $\mathbb{R}$ car si on veut intégrer sur $\mathbb{C}$, on sépare l'intégrale en partie réelle et partie imaginaire et on se ramène au cas sur $\mathbb{R}$.

- Les séries entières permettent de résoudre des équations différentielles, détailler la méthode.

Développements :

- Nombres de Bell
 - Oraux X-ENS 6, FGN, p338
 - Analyse pour l'agrégation, Bernis, p285
- Equation de Bessel
 - Oraux X-ENS Analyse 4, FGN, p101

Références :

- [ELA] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [TAU] Analyse complexe pour la Licence 3, Tauvel
- [KUR] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman
- [CHA] Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch

Leçon 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications

I Généralités

1) Série entière et rayon de convergence [LUV][ELA]

Def 1 : On appelle série entière (SE) toute série de fonctions de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où z est une variable complexe et où (a_n) est une suite complexe.

Def 2 : On appelle somme de la SE $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ l'application S définie en tout point où cela a un sens par :
 $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Prop 3 (Lemme d'Abel) : Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ me SE et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors :

- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, la SE $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.
- $\forall 0 < \rho < |z_0|$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge normalement dans $\overline{D(0, \rho)} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \rho\}$.

Prop 4 : Il existe un unique nombre R tel que :

- $\forall |z| < R$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument
- $\forall |z| > R$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ diverge

Def 5 : L'élément $R \in \overline{\mathbb{R}_+}$ défini par $R = \sup \{r \in \mathbb{R}^+; (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ s'appelle le rayon de convergence de la SE $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$. Le disque $D(0, R)$ est appelé 'disque de convergence'.

Remarque 6 : L'ensemble $C(0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = R\}$ est appelé le cercle d'incertitude. Il est difficile de prévoir le comportement de la série sur ce cercle.

Exemple 7 : $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ vérifie $R=1$ mais diverge sur tout $|z|=1$

- $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ vérifie $R=1$ et converge sur $C(0, 1)$
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ vérifie $R=1$ et diverge en $z=1$ mais converge en tout autre point tel que $|z|=1$ en utilisant le critère d'Abel

Prop 8 : Une SE CVN sur tout compact inclus dans le disque de CV.

Contre-ex 8 : En général il n'y a pas CV sur le disque.

Un exemple $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ vérifie $R=1$ mais ne converge pas uniformément sur le disque car $(z^n)_n$ ne CV pas uniformément vers la fonction nulle sur ce disque.

2) Calcul du rayon de convergence [ELA]

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ me SE de rayon de convergence R . On pose ici $\frac{1}{R} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$.

Prop 10 (Règle de d'Alembert) : On suppose que $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \in \overline{\mathbb{R}_+}$, alors $R = \frac{1}{L}$.

Exemple 11 : pour $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$, $R = +\infty$.

Prop 12 (Formule de Hadamard) : On a la formule :

$$R = \frac{1}{L} \text{ où } L = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

Exemple 13 : pour $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^{2^n}$, $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Corollaire 14 (Règle de Cauchy) : Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = L \in \overline{\mathbb{R}_+}$, alors $R = \frac{1}{L}$.

Exemple 15 : pour $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{2^n}$, $R = 2$.

Prop 16 : Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ deux SE de rayons de CV R_a et R_b respectivement. On a alors :

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$
- Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$
- Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Corollaire 17 : Si $a_n = F(n) \forall n \in \mathbb{N}$ avec F une fonction arithmétique non nulle, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ a pour rayon de CV 1.

3) Opérations sur les séries entières [ELA]

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ deux SE de rayons de CV R_a et R_b .

Def 18 : On appelle :

- série somme, la SE $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$
- série produit, la SE $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$ où $c_n = \sum_{h=0}^n a_h b_{n-h} \forall n \in \mathbb{N}$

• série produit par $\lambda \in \mathbb{C}$, la SE $\sum (\lambda a_n) z^n$ ou $\lambda \sum a_n z^n$

Théorème 19: 1) Le rayon de CV R de la série somme vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$. Si $|z| < \min(R_a, R_b)$:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$

2) En multipliant $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ par $\lambda \neq 0$, on ne change pas le rayon de CV. Si $|z| < R_a$: $\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) z^n$

3) Le rayon de CV R de la série produit vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$. Si $|z| < \min(R_a, R_b)$: $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

Exemple 20: Le rayon de CV R de la série somme ou produit peut vérifier $R > \max(R_a, R_b)$:

• pour $\sum z^n$ et $\sum -z^n$, $R_a = 1$, $R_b = 1$ et $R = +\infty$ pour la somme

• si $a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n=0 \\ 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$ et $b_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n=0 \\ 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

alors $R_a = \frac{1}{2}$, $R_b = 1$ et $R = +\infty$ pour la série produit

II Propriétés de la somme

On considère la SE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon R et de somme S

1) Continuité [ELA]

Théorème 21: La fonction somme S est continue sur $D(0, R)$

Exemple 22: La SE $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ est continue sur $\mathbb{C}$

Corollaire 23: $\forall p \in \mathbb{N}$, S admet un développement limité à l'ordre p en zéro, dont la partie régulière est donnée par $a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p$.

2) Intégration [ELA]

Théorème 24: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ me SE de variable réelle. Si l'on a $[a, b] \subset]-R, R[$, alors: $\int_a^b s(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx$.

Corollaire 25: Les primitives de S sur $] -R, R[$, R.C sont de la forme: $x \mapsto d + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ où $d \in \mathbb{C}$.

Exemple 26: pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

3) Dérivabilité [TAU]

Déf 27: On appelle série entière dérivée la SE $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Prop 28: Une SE et sa série entière dérivée ont le même rayon de convergence.

Théorème 29: En tout point $z_0 \in D(0, R)$, S est dérivable et $S'(z_0)$ est égal à la somme de la série entière dérivée.

Corollaire 30: Sur $D(0, R)$, S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ses dérivées successives sont les fonctions sommes des séries entières dérivées successives. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $z \in D(0, R)$:

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^n$$

En particulier: $S^{(k)}(0) = k! a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 31: $\forall z \in D(0, 1)$, $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$

Application 32 (nombres de Bell): Soit $n \in \mathbb{N}^+$. On note B_n le nombre de partitions de $\{1, \dots, n\}$. On pose $B_0 = 1$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$: $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$

DEV 1

III Fonctions développables en série entière

1) Sur $\mathbb{C}$ [TAU]

Déf 33: Soit f définie sur un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière au point z_0 s'il existe une SE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de CV non nul, et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tel que, $\forall z \in V$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

Théorème 34: Soit f définie dans un voisinage de 0 et admettant une DSE à l'origine. Alors:

- 1) Il existe un voisinage de 0 sur lequel f est indéfiniment dérivable.
 - 2) La DSE de f en 0 est son développement de Taylor.
- Corollaire 35: 1) S'il existe, la DSE à l'origine est unique
- 2) Si f est DSE en 0, ses dérivées successives aussi.
 - 3) Soit f, g DSE en 0 et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $f+g, \lambda f, \lambda g$ sont

DSE en 0.

2) Somme IR [ELA]

Prop 36: Si f est DSE en x_0 , alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est de classe C^∞ .

Contre-ex 37: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas DSE en 0.

Prop 38: Soit f de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, contenant 0. On note $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$. Alors f est DSE en 0 ssi il existe un intervalle ouvert contenant 0 sur lequel la suite $(R_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle.

Prop 39: Soit f de classe C^∞ sur $I =]-d; d[$ avec $d > 0$. On suppose qu'il existe $p > 0$ et $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq \frac{M \cdot n!}{p^n}$. Alors f est DSE en 0 sur l'intervalle $] -R; R[$ où $R = \min(d, p)$.

Exemple 40: En annexe on présente les DSE sous forme zéro.

IV Applications

1) Equations différentielles [ELA]

Méthode 41: pour résoudre une équation différentielle linéaire à l'ordre des séries entières:

1) On suppose que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est solution

2) Par identification, on trouve les coefficients a_n

3) On vérifie que le rayon de CV est maximal.

Exemple 42: Une solution de $x'(1-x) - x(1+x)y' + y = 0$ est la fonction f définie sur $] -1; 1[$ par $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Application 43 (équation de Bessel): On considère l'équation diff BES2
(E): $xy'' + y' + xy = 0$. Alors les solutions de (E) DSE en 0 sont les $f_0(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) Fonction génératrice en probabilités [CHA] [KUR]

On considère des VA discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Déf 44: La fonction génératrice de X est la série entière définie pour tout $|z| \leq 1$: $G_X(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) z^k$. Cette SE a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

Prop 45: Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$.

Théorème 46: Soit $[0; 1[$, G_X est de classe C^∞ avec:

$$G_X^{(n)}(s) = E[X(X-1)\dots(X-n+1)s^{X-n}] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ainsi: $P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$ donc la fonction génératrice caractérise la loi.

Théorème 47: La fonction G_X est m fois dérivable à gauche en 1 ssi X admet un moment d'ordre m , et alors:

$$G_X^{(m)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-m+1)] = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1) \cdot P(X=k)$$

En particulier:

$$E[X] = G_X'(1)$$

$$E[X^2] = G_X''(1) + G_X'(1)$$

$$Var(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - [G_X'(1)]^2$$

Théorème 48 (formule de Wald): Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de VA IID à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit N une VA à valeurs dans $\mathbb{N}^+$ indépendante des X_i . On pose $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$. Alors la fonction génératrice de S_N vérifie: $G_{S_N}(z) = G_N \circ G_{X_1}(z)$

De plus, si X_1 et N admettent une espérance, S_N également et: $E[S_N] = E[N] \cdot E[X_1]$.

ANNEXE

Développements en série entières réels [ELA]

ELA

249

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad R = +\infty$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad R = +\infty$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R = +\infty$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad R = +\infty$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R = +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad R = 1$$

$$(1+x)^d = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(d-1)\dots(d-n+1)}{n!} x^n \quad \begin{matrix} R=1 & \text{si } d \in \mathbb{N} \\ R=+\infty & \text{si } d \notin \mathbb{N} \end{matrix}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad R = 1$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad R = 1$$