

52 Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Cadre

I. Les différents modes de convergence

1. Suites de fonctions [ELA]

CVS, CVU, critère de Cauchy uniforme, fonctions bornées, norme uniforme

2. Séries de fonctions [ELA] [HAU]

série de fonctions, CVS, reste, CVU, CVA, CVN, implications des modes de CV

II. Régularité et interversion

1. Continuité [ELA] [GOU]

Théorème de la double limite, continuité de la limite, théorèmes de Dini, DEV 1 : théorème de Weierstrass

2. Dérivabilité [ELA]

Dérivabilité de la limite, fonction zêta

3. Intervernion avec l'intégrale [ELA] [FAR]

Intervernion en cas de CVU, TCM, TCM pour les séries, lemme de Fatou, TCD, TCD pour les séries

III. Le cas particulier des séries entières

1. Généralités [GOU] [ELA]

Série entière, lemme d'Abel, rayon de CV, dérivées successives
DEV 2 : Nombres de Bell

2. Fonction génératrice en probabilités [CHA] [KUR]

Fonction génératrice, dérivées successives, lien avec les moments, formule de Wald

Présentation :

- Les suites de fonctions sont l'analogie des suites numériques, où au lieu d'associer un nombre à un entier, on lui associe une fonction. On procède de la même façon pour les séries.
- On observe que la CVS ne suffit pas, par exemple car la limite d'une suite de fonctions continues n'est pas forcément continue. Pour remédier à cela, on introduit la CVU.
- Pour les séries, il est souvent plus simple de montrer la CVN pour en déduire la CVU.
- Les théorèmes de Dini sont en quelque sorte des réciproques partielles à l'implication $CVU \Rightarrow CVS$.
- Il n'est pas toujours aisé d'obtenir la CVU d'une suite de fonctions. Ainsi en se plaçant dans un cadre plus général, la théorie de l'intégration de Lebesgue nous permet d'avoir des théorèmes aux hypothèses simples pour intervertir limite et intégrale.

Développements :

- Théorème de Weierstrass par les probabilités
 - De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman, p195

- Oraux X-ENS 6, FGN, p259
- Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani, p158
- Nombres de Bell
 - Oraux X-ENS 6, FGN, p338
 - Analyse pour l'agrégation, Bernis, p285

Références :

- [ELA] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani
- [HAU] Les contre-exemples en mathématiques, Hauchecorne
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [FAR] Calcul Intégral, Faraut
- [CHA] Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch
- [KUR] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman

Leçon 247: Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

Soit X un ensemble non vide et E un EVN muni de $\|\cdot\|$.
On considère aussi $f: X \rightarrow E$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans E .

I. Les différents modes de convergence

1) Suites de fonctions [ELA]

Déf 1: On dit que (f_n) converge simplement vers f sur X si pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$. Autrement dit: $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.

Déf 2: On dit que (f_n) converge uniformément vers f si: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.

Prop 3: Si $(f_n)_n$ CVU sur X vers f , alors (f_n) CVS vers f sur X .

Contre-ex 4: $X = [0, 1]$, $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Alors (f_n) CVS mais pas de CVU vers $f = 0$ sur $[0, 1]$.

Théorème 5 (critère de Cauchy uniforme): On suppose que E est complet. Alors (f_n) CVU ssi: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n, m \geq N$, $\forall x \in X$, $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon$.

Déf 6: On note $\mathcal{B}(X, E)$ l'EV des applications bornées de X dans E . On le munit de: $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\| \quad \forall f \in \mathcal{B}(X, E)$.

Cela en fait un EVN .

Prop 7: Une suite (f_n) de $\mathcal{B}(X, E)$ CVU sur X vers $f \in \mathcal{B}(X, E)$ ssi: $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Corollaire 8: Si (f_n) suite de $\mathcal{B}(X, E)$ CVU sur X vers f , alors $f \in \mathcal{B}(X, E)$.

Corollaire 9: Si E est complet, $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

2) Séries de fonctions [ELA] [HAU]

Déf 10: On appelle série des fonctions f_n , note $\sum f_n$, la suite (s_n) où s_n est l'application de X dans E définie par

$s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ et est appelée la n -ième somme partielle.

Déf 11: Lorsque $(s_n)_n$ CVS sur X , on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ CVS sur X . On note $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ la limite.

Déf 12: On appelle reste d'ordre n d'une série $\sum f_n$ qui CVS, la fonction $R_n: x \mapsto \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$.

Déf 13: On dit que $\sum f_n$ CVU sur X si la suite de fonctions $(s_n)_n$ CVU sur X .

Prop 14: Si $\sum f_n$ CVU sur X , alors (f_n) CVU vers zéro sur X .

Prop 15: Si $\sum f_n$ CVS, alors $\sum f_n$ CVU ssi la suite (R_n) des restes CVU vers zéro dans X .

Contre-ex 16: Soit $f_n: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Alors la série $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$ mais $\sum f_n$ n'est pas de CVU sur $\mathbb{R}^+$.

Déf 17: On dit que $\sum f_n$ converge absolument sur X si pour tout $x \in X$, la série réelle $\sum \|f_n(x)\|$ converge.

Déf 18: On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur X si: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{B}(X, E)$ et la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Prop 19: Si E est un Banach, on a les implications suivantes pour la convergence de $\sum f_n$ sur X :

$$\begin{aligned} \text{CVN} &\Rightarrow \text{CVU} \\ &\Downarrow \\ \text{CVA} &\Rightarrow \text{CVS} \\ \text{Contre-ex 20: Soit } f_n: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \end{aligned}$$

Alors $\sum f_n$ CVU mais

pas de CVA ni de CVN.

Contre-ex 21: Une série définie dans le contre-exemple 16 CVA mais pas de CVU ni de CVN.

II Régularité et intervention

1) Continuité [ELA] [GOU]

Théorème 22 (de la double limite): Soit $x \in F$ un EVN de dim finie. Soit (f_n) qui CVU vers f . Soit $a \in \bar{X}$ tel que $\forall m \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe. Si F est complet, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et on a l'intervention de limites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Contre-ex 23: Si on reprend l'exemple 4, on a que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x)$$

Théorème 24: Si (f_n) CVU vers f sur X , et si toutes les fonctions f_n sont continues en $a \in X$, alors f continue en a .

Contre-ex 25: Si $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}_{\geq 0}$ qui n'est pas continue en 0, donc pas de CVU.

Corollaire 26: Soit $a \in X$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a , et que $\exists f_m$ CVU sur X . Alors la somme de la série est continue en a .

Théorèmes 27 (de Dini):

• Soit $(f_n)_n$ suite croissante de fonctions continues sur un compact $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) CVS vers f continue, alors (f_n) CVU vers f .
• Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions croissantes définies sur un compact $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) CVS vers f continue sur I , alors (f_n) CVU vers f sur I .

Théorème 28 (de Weierstrass): Toute fonction f continue sur un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales. **DEV 1**

2) Dérivabilité [ELA]

Théorème 29: Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) suite d'applications dérivables sur I . On suppose que (f_n) CVS vers f et que $(f'_n)_n$ CVU sur I . Alors f est dérivable sur I et: $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ **DEV 2**

Contre-ex 30: Si $f_n(x) = (x^2 + \frac{1}{n})^{1/2}$ alors (f_n) CVU vers $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$ mais cette dernière n'est pas dérivable en 0.

Corollaire 31: On suppose les f_n dérivables sur I . Si $\exists f_m$ CVU sur I et $\forall x \in I$, alors la fonction somme S est dérivable et $\exists f'_m$ CVU sur I ; $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$.

Exemple 32: La fonction $\exp_n x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\exp_n(x) = (-1)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n-m)^k}{m!} \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$$

3) Intervention avec l'intégrale [ELA] [FAR]

Théorème 33: Soit (f_n) qui CVU vers f sur $[a, b]$ et tel que les f_n sont intégrables sur $[a, b]$. Alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Soit (x, t, n) un espace mesuré. Théorème 34 (TCM): Soit (f_n) suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On pose $g(n) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$.

$$\text{Alors: } \int_X f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

Contre-ex 35: La mesure est indénombrable. Par exemple prendre $f_n = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$

Corollaire 36: Soit (f_n) suite de fonctions mesurables positives. Alors: $\int_X (\sum_{n=0}^{\infty} f_n) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n d\mu$

Lemme 37 (de Fatou): Soit (f_n) suite de fonctions mesurables positives. Alors: $\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$

Contre-ex 38: L'inégalité peut être stricte. Prendre $x = \mathbb{R}^+$ et $f_n(x) = n e^{-nx}$

Théorème 39 (TCD): Soit (f_n) suite de fonctions intégrables tel que: $\int_X f_n(x) d\mu \rightarrow \int_X f(x) d\mu$ et $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p.

• Il existe g positive intégrable tel que $\forall n, f_n(x) \leq g(x)$ p.p. Alors f est intégrable et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

Corollaire 40: Soit (f_n) suite de fonctions mesurables.

S: $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_x |f_n| d\mu < +\infty$, alors: $\int_x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_x f_n d\mu$

III Le cas particulier des séries entières

1) Généralités [GUV] [ELA]

Def 41: On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$ et (a_n) est une suite complexe

Prop 42 (Lemme d'Abel): Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une SE et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors:

- 1) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est ACV
- 2) $\forall 0 < \rho < |z_0|$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ CVN dans $\overline{D(0, \rho)} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \rho\}$

Def 43: Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une SE. Le nombre $R = \sup\{\rho > 0; (a_n \rho^n)_n \text{ est bornée}\}$ s'appelle le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.

On a:

- 1) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ CVA
- 2) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ diverge.

Théorème 44: Une SE CVN sur tout compact inclus dans le disque de CV.

Contre-ex 45: En général il n'y a pas CVU sur le disque.

Par exemple prendre: $\sum z^n$

Théorème 46: La somme S de la SE $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et: $\forall h \in \mathbb{N}$, $\forall x \in] -R, R[$,

$$S^{(h)}(x) = \sum_{n=h}^{+\infty} \frac{h!}{(n-h)!} a_n x^{n-h}$$

En particulier: $a_h = \frac{S^{(h)}(0)}{h!} \quad \forall h \in \mathbb{N}$.

Exemple 47: $\forall z \in D(0, 1)$, $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n$

Application 48 (nombre de Bell): Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note B_n le nombre de partitions de $\{1, \dots, n\}$. On pose $B_0 = 1$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$: $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$

DEV 2

2) Fonction génératrice en probabilités [CHA] [KUR]

On considère les VA discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

Def 49: La fonction génératrice de X est la série entière définie pour tout $|z| \leq 1$: $G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) z^k$

Cette SE a un rayon de CV au moins égal à 1.

Prop 50: Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$.

Théorème 51: Sur $[0, 1[$, G_X est de classe C^∞ avec:

$$G_X^{(n)}(s) = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-n+1)s^{X-n}] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ainsi: $\mathbb{P}(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$ donc la fonction génératrice caractérise la loi.

Théorème 52: La fonction G_X est m fois dérivable à gauche en 1 ssi X a un moment d'ordre m , et alors:

$$G_X^{(m)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-m+1)] = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)\mathbb{P}(X=k)$$

En particulier:

$$\mathbb{E}[X] = G_X'(1)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = G_X''(1) + G_X'(1)^2$$

$$\text{Var}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - [G_X'(1)]^2$$

Théorème 53 (formule de Wald): Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de VA IID à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit N une VA à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des X_i . On pose $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$. Alors la fonction génératrice de S_N vérifie:

$$G_{S_N}(s) = G_N \circ G_{X_1}(s)$$

De plus, si X_1 et N admettent une espérance, S_N existe et: $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_1]$.