

49 Leçon 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse

I. Interversion entre limites

Cadre

1. La convergence uniforme [ELA]

CVS, CVU, $CVU \Rightarrow CVS$, critère de Cauchy uniforme, CVN, $CVN \Rightarrow CVU$, théorème de la double limite

2. Continuité [ELA] [GOU]

$CVU \Rightarrow$ continuité de f , contre-exemple, théorèmes de Dini

3. Dérivabilité [ELA]

Dérivabilité si CVU, contre-exemple, exemple de zêta

II. Interversion limite et intégrale

Interversion dans le cas de la CVU

1. Convergence sous le signe intégrale [FAR]

TCM + contre-exemple, TCM pour les séries, lemme de Fatou + contre-exemple, lemme de Scheffé, TCD + contre-exemple, TCD pour les séries

2. Intégrales à paramètres [BRI] [IP]

Théorème de continuité sous l'intégrale, théorème de dérivation sous l'intégrale, [DEV 1 : intégrale de Dirichlet](#), moments d'une VAR, holomorphie sous le signe intégrale, [DEV 2 : fonction caractéristique et moments de la loi \$\Gamma\(r, \lambda\)\$](#)

III. Interversion intégrale-intégrale [BRI]

Fubini-Tonelli, Fubini-Lebesgue, intégrale de Gauss, Fubini-Lebesgue + contre-exemple, intégrale de Dirichlet

Présentation :

- Une des préoccupations majeure en analyse est l'étude de limites. Ainsi il est nécessaire de pouvoir intervertir des limites entre elles. Par exemple, la continuité d'une fonction sert à intervertir limite et fonction.

Le but de cette leçon est de donner des critères qui permettent d'intervertir les symboles donnés : limites (continuité, dérivabilité) ou par exemple intégrales (même si peu importe la théorie utilisée, une intégrale d'une fonction est une limite).

- Les théorèmes de continuité/dérivabilité avec l'intégrale de Lebesgue sont très pratiques, et permettent de se passer de la notion de convergence uniforme comme dans le cas de l'intégrale de Riemann.
- Un grand nombre de ces résultats est utilisé en probabilités, et permet de démontrer des théorèmes cruciaux, comme le TCL.

Développements :

- Intégrale de Dirichlet
 - Calcul intégral, Candelpergher, p30 et 212
 - Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements, Bernis, p262

- Oraux X-ENS Analyse 3, FGN, p214
- Fonction caractéristique et moments de la loi Gamma
 - L'Oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann et Pecatte, p453
 - Exercices de probabilités, Cottrell and co, p121

Références :

- [ELA] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [BRI] Analyse. Théorie de l'intégration, Briane-Pagès
- [FAR] Calcul Intégral, Faraut
- [IP] L'oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann-Pecatte

Leçon 235: Problèmes d'intervention de symboles en analyse.

I Intervention entre limites

Dans cette partie, on considère X un ensemble non vide et E un EVN muni de $\|\cdot\|$. On considère aussi $f: X \rightarrow E$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E .

1) La convergence uniforme [ELA]

Déf 1: On dit que (f_n) converge simplement vers f sur X si pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$. Ainsi: $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.

Déf 2: On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur X si: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$. Autrement dit: $\sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Déf 3: On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X .

Prop 4: Si $(f_n)_n$ CVU sur X vers f , alors elle CVS vers f sur X .
Centre-ex 5: $X = [0; 1]$, $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Alors (f_n) CVS mais pas de CVU vers $f = \mathbb{1}_{\{1\}}$ sur $[0; 1]$.

Théorème 6 (critère de Cauchy uniforme): On suppose que E est complet. Alors (f_n) CVU ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq n$, $\forall x \in X$, $\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon$.

Déf 7: On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur X si:
• $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{B}(X, E)$.
• la série $\sum \|f_n\|$ converge.

② de lim finie

Exemple 8: La série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ CVU sur $[0; 1]$

Prop 9: Si $\sum f_n$ CVU sur X , alors elle CVU sur X .

Théorème 10 (de la double limite): On suppose que $X \subset F$ un EVN. Soit (f_n) qui CVU vers f . Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe. Si E est complet, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et on a l'intervention de limites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

2) Continuité [ELA][CVU]

Théorème 11: Si (f_n) CVU vers f sur X , et que toutes les fonctions f_n sont continues en $a \in X$, alors f est continue en a .

Contre-ex 12: $f_n(x) = e^{-nx}$ CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{1}_{\{0\}}$ qui n'est pas continue en 0, donc il n'y a pas CVU.

Corollaire 13: Si $\sum f_n$ CVU sur X et que chaque f_n est continue sur X , alors la somme de la série est continue.

Théorèmes 14 (de Dini):

• Soit (f_n) suite croissante de fonctions continues et définies sur un compact $I = [a; b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) CVS vers f continue sur I , alors (f_n) CVU vers f sur I .

• Soit (f_n) suite de fonctions croissantes définies sur un compact $I = [a; b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) CVS vers f continue sur I , alors (f_n) CVU vers f sur I .

3) Dérivabilité [ELA]

Théorème 15: Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) suite d'applications dérivables sur I . On suppose que (f_n) CVS vers f sur I , et que (f'_n) CVU sur I . Alors f est dérivable sur I et $\forall x \in I$: $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

Contre-ex 16: f_n CVU des dérivées est essentielle, par

exemple $f_n(x) = (x^2 + \frac{1}{n})^{1/2}$ CUV vers $x \rightarrow 1$ sur $\mathbb{R}$, mais cette dernière n'est pas dérivable en 0.

Corollaire 17: Soit (f_n) tq des f_n sont dérivables sur I .

On suppose que $\exists f_n$ CUV et que $\exists f_n'$ CUV sur I . Alors la fonction somme S est dérivable sur I et on a: $\forall x \in I, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

Exemple 18: La fonction zêta $\zeta: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+k}}, \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

II Interversion limite et intégrale

Théorème 19: Soit (f_n) qui CUV sur $[a, b]$ et tq des f_n sont intégrables sur $[a, b]$. Alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

Dans cette partie, on considère $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1) Convergence sous le signe intégrale [FAR]

Théorème 20 (de convergence monotone): Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables $\pm$ valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$. On pose $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Alors: $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$

Contre-ex 21: L'hypothèse de croissance est indispensable. Par exemple, prendre $f_n = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$.

Corollaire 22: Soit (f_n) suite de fonctions mesurables positives. Alors: $\int_X (\sum_{n=1}^{+\infty} f_n) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} (\int_X f_n d\mu)$

Lemme 23 (de Fatou): Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors:

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq +\infty$$

Remarque 24: L'inégalité peut être stricte. Par exemple prendre $X =]0, +\infty[$ et $f_n(x) = n \cdot e^{-nx}$.

Théorème 25 (de Scheffé): Soit (f_n) suite de $L^1_{\mu^+}(X)$ qui CUV μ -pp vers $f \in L^1_{\mu^+}(X)$ et tq $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Alors: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$

Théorème 26 (de convergence dominée): Soit (f_n) suite de fonctions intégrables vérifiant:

- $f_n(x) \rightarrow f(x)$ μ -pp
 - $\exists g$ intégrable positive tq $\forall n, |f_n(x)| \leq g(x)$ μ -pp
- Alors f est intégrable et: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

(et même $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$)

Corollaire 27: Soit (f_n) suite de fonctions mesurables.

$$\text{Si: } \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |f_n| d\mu < +\infty, \text{ alors: } \int_X (\sum_{n=1}^{+\infty} f_n) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu$$

Contre-ex 28: L'hypothèse de domination est cruciale. Par exemple prendre $f_n = n \cdot \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$.

2) Intégrales à paramètres [BRI] [IFP]

Dans cette partie, E est un espace mesuré, I intervalle de $\mathbb{R}$ et μ un ouvert de $\mathbb{A}$.

Théorème 29 (continuité sous l'intégrale): Soit $f: E \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et $m_0 \in E$. On suppose que:

- $\forall n \in E, x \mapsto f(n, x)$ est mesurable
- pour μ -pp $x, m \mapsto f(m, x)$ est continue en m_0 .
- $\exists g \in L^1_{\mu^+}(X)$ tq $\forall n \in E, |f(n, x)| \leq g(x)$ μ -pp

Alors la fonction $F(m) = \int_X f(m, x) d\mu(x)$ est définie sur E et est continue en m_0 .

Exemple 30: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\hat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} e^{iwx} f(x) dx$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 31 (dérivation sous l'intégrale): Soit $f: I \times X \rightarrow \mathbb{C}$ tq:

- $\forall m \in I, x \mapsto f(m, x) \in L^1(\mu)$
- $\mu(\Omega) < \infty, m \mapsto f(m, x)$ est dérivable sur I
- $\exists g \in L^1(\mu, \mu)$ tq $\forall m \in I, \left| \frac{\partial}{\partial m} f(m, x) \right| \leq g(x) \quad \mu(x) < \infty$

Alors la fonction $F(m) = \int_X f(m, x) d\mu(x)$ est définie et dérivable sur I et $F'(m) = \int_X \frac{\partial}{\partial m} f(m, x) d\mu(x)$.

Appli 32: Intégrale de Dirichlet

On a l'égalité: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

DEV 1

Corollaire 33: Soit X une VAR admettant un moment d'ordre n . Alors ϕ_X est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $\phi_X^{(n)} = (-i)^n \phi_X(n)(0)$.

Théorème 34 (holomorphie sous le signe intégrale): Soit

$f: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$ tel que:

- $\forall z \in \Omega, x \mapsto f(z, x)$ est mesurable
- $\forall x \in X, z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur Ω
- $\exists g \in L^1(\mu)$ tq $\forall z \in \Omega, |f(z, x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X$

Alors la fonction $F(z) = \int_X f(z, x) d\mu(x)$ est bien définie et holomorphe sur Ω , et $F'(z) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} f(z, x) d\mu(x)$

Appli 35: La fonction caractéristique de la loi

$\Gamma(n, \lambda)$ est $t \mapsto \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^n$. On en déduit les moments de tout ordre de $\Gamma(n, \lambda)$ avec le corollaire 33.

DEV 2

III Intervention intégrale - intégrale [PRI]

Dans cette partie, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ sont σ -finis.

Théorème 36 (Fubini-Tonelli): Soit $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable.

Alors $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont mesurables et $\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Exemple 37: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Théorème 38 (Fubini-Lebesgue): Soit $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$. Alors

- $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ est définie μ -pp et est μ -intégrable
 - $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ est définie ν -pp et est ν -intégrable
 - $\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$
- Contre-ex 39: la fonction $f(x, y) = 2e^{-2xy} - e^{-x^2} - e^{-y^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+ \times [0, 1]$

Appli 40: On retrouve la valeur de l'intégrale de Dirichlet en étudiant $f(x, y) = e^{-xy} \sin(x)$ sur $[0, A] \times [0, 1]$ ou $\mathbb{R}^+$.

Intervention en probabilités [CHA]

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et X, Y dense VA réelles sur Ω .

Def 41: On dit que X et Y sont indépendantes, noté $X \perp Y$, si

$\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$

Théorème 42: $X \perp Y$ ssi $\mathbb{P}_{(X, Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$

Prop 43: si X et Y sont disjointes $\leq$ valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$X \perp Y$ ssi $\forall m, n \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X=m, Y=n) = \mathbb{P}(X=m) \cdot \mathbb{P}(Y=n)$

• si X et Y sont $\leq$ densité, alors $X \perp Y$ ssi la densité de (X, Y) est égal au produit des densités.

Théorème 44: Soit X, Y des VA intégrables tel que $X \perp Y$.

Alors: $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.

Corollaire 45: Soit X, Y des VA de densité intégrable, tel que $X \perp Y$. Alors: $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Prop 46: On suppose que $X \perp Y$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors:

$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$ où ϕ est la fonction caractéristique.

Appli 47: À l'aide du théorème de dérivation sous le signe intégrale, on peut calculer la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $\phi(t) = e^{it\mu} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$