

48 Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

I. Intégrale de Lebesgue

1. Fonctions étagées et mesurables positives [BRI] [FAR]

Fonction étagée, lemme fondamental d'approximation, intégrale d'une fonction étagée positive, propriétés, intégrale d'une fonction mesurable positive, TCM, inégalité de Markov, lemme de Fatou

2. Fonctions intégrables [BRI] [FAR]

Fonction intégrable, intégrale, propriétés, TCD, lien avec l'intégrale de Riemann, contre-exemple $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

II. Théorèmes généraux

1. Intégrales à paramètres [ZQ] [BRI] [IP]

Théorème de continuité sous l'intégrale, exemple transformée de Fourier, théorème de dérivation sous l'intégrale, moments d'une VAR, DEV 1 : intégrale de Dirichlet

2. Théorèmes de Fubini [BRI] [KUR]

Fubini-Tonelli, intégrale de Gauss, Fubini-Lebesgue, intégrale de Dirichlet

III. Espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

1. Espaces $\mathcal{L}^p$ [KUR] [FAR]

Espaces $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^\infty$, DEV 2 : inégalité de Young-Hölder-Minkowski, $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme, contre-exemple avec $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

2. Espaces L^p [FAR] [KUR]

Relation d'équivalence, espaces L^p , $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un EVN, inclusion des L^p , contre-exemple, théorème de Riesz-Fischer, L^2 est un Hilbert

Présentation :

- Dans toute la leçon on considère une mesure μ quelconque, et donc sauf indication les résultats s'appliquent à λ la mesure de Lebesgue.
- Les fonctions étagées jouent dans la construction de l'intégrale de Lebesgue le rôle dévolu aux fonctions en escalier dans la théorie de Riemann.
- Le TCM et le TCD permettent de faire des interversions série-intégrale.
- Sur $\mathcal{L}^p$, $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme. C'est pour cette raison que l'on introduit L^p . On confondra toujours une fonction $f \in \mathcal{L}^p$ et sa classe dans L^p .

Développements :

- Intégrale de Dirichlet
 - Calcul intégral, Candelpergher, p30 et 212
 - Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements, Bernis, p262
 - Orlans X-ENS Analyse 3, FGN, p214
- Inégalité de Young-Hölder-Minkowski
 - De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman, p209

- Eléments d'analyse réelle, Rombaldi, p239 et 39

Références :

- [BRI] Analyse. Théorie de l'intégration, Briane-Pagès
- [FAR] Calcul Intégral, Faraut
- [ZQ] Analyse pour l'agrégation, Queffelec-Zuily
- [IP] L'oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann-Pecatte
- [KUR] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman

Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ un $\mathbb{C}$ -module de $\mathcal{D}(K)$.

I Intégrale de Lebesgue

1) Fonctions étagées et mesurables positives [BPI][FAP]

Déf 1: Une fonction $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (K, \mathcal{D}(K))$ est étagée si elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On a sa forme canonique:

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{avec } \lambda_i \in K, A_i \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset, \bigcup_{i=1}^n A_i = X$$

Leçon 2 (Fondamental d'approximation): Soit f mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$. Alors il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge simplement vers f sur X . Si f est positive, cette suite est croissante et positive.

Déf 3: Soit f une fonction étagée positive sur $(X, \mathcal{A})$.

L'intégrale de f par rapport à μ est définie par:

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(A_i) \quad \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{R}_+, A_i \in \mathcal{A}$$

Prop 4: Soit f, g deux fonctions étagées positives sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

$$1) \int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

$$2) f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$

$$3) \lambda \geq 0 \Rightarrow \int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$$

Déf 5: Soit f mesurable positive ($f \in \mathcal{M}^+(X)$). L'intégrale de f est $\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu; \varphi \leq f \text{ et } \varphi \text{ étagée positive} \right\}$

Théorème 6 (de convergence monotone): Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Soit $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Alors f est mesurable et $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Remarque 7: On obtient les mêmes propriétés que dans prop 4.

Prop 8: Soit $f \in \mathcal{M}^+(X)$. Alors: $\int_X f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{f > 0\}) = 0$.

Corollaire 9: Si $f = g$ μ -pp alors $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

Prop 10 (intégrale de Lebesgue): Soit $f \in \mathcal{M}^+(X)$. Alors:

$$\forall A \geq 0, \mu(\{f \geq A\}) \leq \frac{1}{A} \int_X f d\mu$$

Leçon 11 (de Fatou): Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{M}^+(X)$. Alors:

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

Remarque 12: L'inégalité peut être stricte, prendre $x = \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = n \cdot e^{-nx}$ et $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue.

2) Fonctions intégrables [BPI][FAP]

Déf 13: Une fonction $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (K, \mathcal{D}(K))$ est dite intégrable si f est mesurable et $\int_X |f| d\mu < +\infty$.

On note $\mathcal{L}^1_K(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions μ -intégrables.

Déf 14: 1) Si $K = \mathbb{R}$, $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$

$$2) \text{ Si } K = \mathbb{C}: \int_X f d\mu = \int_X \operatorname{Re}(f) d\mu + i \int_X \operatorname{Im}(f) d\mu$$

Exemple 15: Soit $(\mu, \mathcal{D}(\mu))$ muni de la mesure de comptage m , on a alors que:

$$\mathcal{L}^1(m) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}}; \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < +\infty \right\}$$

Prop 16: 1) $\mathcal{L}^1_K(\mu)$ est un K -espace vectoriel.

$$2) f \geq 0 \Rightarrow \int_X f d\mu \geq 0$$

$$3) f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$

$$4) \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

Théorème 17 (de convergence dominée): Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables vérifiant:

o $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour presque-tout x

o il existe g intégrable positive tel que pour tout n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour presque-tout x .

$$\text{Alors } f \text{ est intégrable et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Remarque 18: L'hypothèse de domination est cruciale. Prendre par exemple $x \in \mathbb{N}$ et $\mu = \lambda$ avec $f_n = n \mathbb{1}_{\{n\}}$.

Prop 19: On se place dans le cas où $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue.
 Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée et Riemann-intégrable,
 alors f est Lebesgue-intégrable ($f \in L^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$)
 et: $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f(t) d\lambda(t)$.

Contre-ex 20: La fonction $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann mais est intégrable au sens de Lebesgue.

II Théorèmes généraux

1) Intégrales à paramètre [20] [DAI] [JP]

Soit (x, t, μ) un espace mesuré et E un espace métrique.

Soit $f: E \times X \rightarrow E$ et on pose $F(t) = \int_X f(t, x) d\mu(x)$.

Théorème 21 (de continuité sous le signe intégrale): On suppose que:

- 1) $\forall t \in E, x \mapsto f(t, x)$ est mesurable
- 2) Pour presque tout $x \in X, t \mapsto f(t, x)$ est continue en $t_0 \in E$
- 3) Il existe $g \in L^1(X)$ positive tel que $|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in E, \mu(x) < \infty$

Alors F est définie sur E et est continue en t_0 .

Application 22: Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. Alors la fonction f définie par $\hat{f}(\mu) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\mu x} f(x) dx$ pour $\mu \in \mathbb{R}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 23 (de dérivation sous le signe intégrale): Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que:

- 1) $\forall t \in I, x \mapsto f(t, x)$ est dans $L^1(\mu)$.
- 2) $\mu(x) < \infty, t \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur I . On note $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ sa dérivée.
- 3) $\forall$ compact K de I , il existe $g_K \in L^1(\mu)$ positive tel que $|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)| \leq g_K(x) \quad \forall t \in K, \mu(x) < \infty$.

Alors F est dérivable sur I et $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x)$.

Application 24: Soit x une VA réelle et $\phi_x(t) = \mathbb{E}[e^{itx}]$ sa fonction caractéristique. Si x admet un moment d'ordre m , alors ϕ_x est de classe C^m sur $\mathbb{R}$ et pour tout $h \leq m$, $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_x^{(h)}(t) = i^h \mathbb{E}[x^h e^{itx}]$.

Application 25 (intégrale de Dirichlet): On pose $\forall x > 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$, En étudiant cette fonction, on en déduit que: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

2) Théorèmes de Fubini [DAI] [KUR]

Théorème 26 (de Fubini-Tonelli): Soit $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable et μ, ν deux mesures σ -finies. Alors:

1) Les fonctions $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont définies partout et resp μ et ν -mesurables.

2) $\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Application 27 (intégrale de Gauss): On obtient la formule: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Théorème 28 (Fubini-Lebesgue): On considère les mêmes espaces mesurés que le théorème 26. Soit $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$. Alors:

- 1) $\mu(x) < \infty, y \mapsto f(x, y) \in L^1(\nu)$
 $\nu(y) < \infty, x \mapsto f(x, y) \in L^1(\mu)$
- 2) $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \in L^1(\mu)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \in L^1(\nu)$
 ces fonctions étant définies resp μ -pp et ν -pp.

3) $\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Application 29: En calculant l'intégrale de $f(x, y) = e^{-xy} \sin(x)$ sur $[0, \infty[\times [0, +\infty[$, on en déduit que: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

III Espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

1) Espaces L^p [KUR][FAR]

Def 30: Pour $p \in \mathbb{C}^+$, $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(x, \mu)$ l'ensemble des applications mesurables de (x, μ) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tel que: $\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty$.

On note alors $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$.

On note $L^\infty(x, \mu)$ l'ensemble des applications mesurables de (x, μ) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tel que $\|f\|_\infty < +\infty$ où $\|f\|_\infty = \inf \{ M \in \mathbb{R}^+; \mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0 \}$.

Prop 31 (Inégalité de Young): Soit $p, q > 0$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $\forall m, n \in \mathbb{R}_+^*$, $m^{1/p} \cdot n^{1/q} \leq \frac{1}{p} m + \frac{1}{q} n$.

Théorème 32 (Inégalité de Hölder): Soit $p, q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Alors $fg \in L^1$ et: $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Théorème 33 (Inégalité de Minkowski): Soit $p \geq 1$. Soit $f, g \in L^p$. Alors $f+g \in L^p$ et:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

DEV 2

Remarque 34: Les inégalités sont aussi vraies pour $p = +\infty$.

Corollaire 35: Pour $1 \leq p \leq +\infty$, l'ensemble $L^p(x, \mu)$ est un espace vectoriel et l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme sur celui-ci.

Contre-ex 36: Avec $X = \mathbb{R}$ et $\mu = \lambda$, on a $\|1_{\mathbb{R}}\|_p = 0$ mais $1_{\mathbb{R}} \neq 0$.

2) Espaces L^p [FAR][KUR]

Prop 37: Soit $f, g \in L^p$. La relation $\sim$ définie par

$f \sim g$ ssi $f = g$ μ -pp, est une relation d'équivalence sur L^p .

Def 38: On définit les espaces L^p par: $L^p(x, \mu) = L^p(x, \mu) / \sim$.

Prop 39: Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Lemme 40: Soit μ une mesure finie. Si: $1 \leq p \leq +\infty$, alors on a l'inclusion $L^r \subset L^p$.

Contre-ex 41: Si $p = \lambda$ alors $f \in L^\infty$ mais $f \notin L^p$ à aucun L^p pour $1 \leq p < +\infty$.

Théorème 42 (deiesz-Fischer): Pour tout $p \in \mathbb{C}^+, +\infty$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet.

Corollaire 43: L'espace $L^2(x, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$.