46 Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

I. Fonctions monotones

1. Définitions et premières propriétés [RDO]

   Fonction croissante-décroissante-monotone, prop, lien injectivité et stricte monotonie

2. Régularité [RDO]

   Théorème de la limite monotone, points de discontinuité, équivalence f continue et $f(I)$ intervalle, lien de la monotonie avec la dérivée

3. Suites et séries [GOU]

   Limite simple, théorème de Dini, comparaison série-intégrale

II. Fonctions convexes

1. Généralités [ROM]

   Fonction convexe, épigraphe, cordes, prop, contre-exemples

2. Régularité des fonctions convexes [ROM]

   Continuité, inégalité des trois pentes, fonction affine, fonction constante, minimum global, lien avec la dérivée, lien avec f''

III. Applications

1. Inégalité de convexité [ROM] [GOU]

   Exemples pour des fonctions usuelles, inégalité de Young-Hölder-Minkowski, moyennes arithmétique-géométrique-harmonique

2. En probabilités [CHA] [KUR]

   Fonction de répartition, inégalité de Jensen, lemme de Borel-Cantelli 2, inégalité de Hoeffding

Annexe :

- Epigraphe, cordes, inégalité des trois pentes pour une fonction convexe [GOU]

Présentation :

- Comme f est décroissante si et seulement si $-f$ est croissante, on peut se restreindre à l'étude des fonctions croissantes.
- Pour étudier le sens de variation d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée et on consigne les résultats dans un tableau, appelé tableau de variations.
- L'étude des fonctions convexes se ramène à l'étude des fonctions convexes sur un intervalle réel. Cela justifie que l'on s'intéresse principalement à $\mathbb{R}$.
- On peut assez facilement déterminer si une fonction est convexe en regardant son graphe.
- Pour les fonctions convexes, le fait qu'un point soit un point critique suffit à ce qu'il soit en fait un minimum global (ce qui n'est pas vrai en général, penser à $x \mapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en 0).
- Le lien entre fonctions convexes et monotone est que pour une fonction convexe, sa dérivée à droite (resp à gauche) est monotone.

Développements :

- Critères de convexité d'une fonction différentiable
  - Petit Guide de Calcul Différentiel, Rouvière, p127-329-381

Références :

- [RDO] Cours de mathématiques, topologie et éléments d'analyse Tome 3, Ramis-Deschamps-Odoux
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [ROM] Elements d'analyse réelle, Rombaldi
- [CHA] Probabilités et statistiques pour l'épreuvre de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch
- [KUR] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman

Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications

I Fonctions monotones

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.

1) Définitions et premières propriétés [RDO]

Déf 1 : On dit que f est croissante (resp strictement croissante) si : $\forall x, y \in D$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
(resp $\forall x, y \in D$, $x \leq y \Rightarrow f(x) < f(y)$).
On dit que f est décroissante si $-f$ est croissante.
On dit que f est monotone si f est croissante ou décroissante.

Exemple 2 : • $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Prop 3 : Soit f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$.
1) Si f est croissante et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors λf est croissante.
2) Si f et g sont croissantes, alors $f+g$ est croissante.
3) Si f et g sont croissantes et positives, fg est croissante.
4) Si f et g sont croissantes, $f \circ g$ est croissante.
5) Si f est croissante et $f > 0$, alors $\frac{1}{f}$ est décroissante.

Contre-ex 4 : La fonction $x \mapsto x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ mais $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

Prop 5 : Soit f une application monotone. Alors f est injective ssi elle est strictement monotone.

2) Régularité [RDO]

Théorème 6 (de la limite monotone) : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que a soit adhérent à $D \cap]a; t_0[$ (resp $D \cap]-\infty; a[$). Alors f admet une limite, finie ou infinie, à droite (resp à gauche) en point a.

Théorème 7 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. Alors l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Théorème 8 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. Alors f est continue sur I ssi $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire 9 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f induit un homéomorphisme de I sur J.

Théorème 10 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors :
1) f est constante ssi : $\forall t \in \mathring{I}$, $f'(t) = 0$.
2) f est croissante ssi : $\forall t \in \mathring{I}$, $f'(t) \geq 0$.
3) f est décroissante ssi : $\forall t \in \mathring{I}$, $f'(t) \leq 0$.

Exemple 11 : La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée s'annule en 0.

Exemple 12 : L'application sinus induit un homéomorphisme strictement croissant de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$, de réciproque arcsin qui est un homéomorphisme strictement croissant de $[-1; 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

3) Suites et séries [GOU]

Prop 13 : Soit (f_n) une suite de fonctions croissante qui converge simplement vers f. Alors f est croissante

Théorème 14 (de Dini) : Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles définies sur un segment $I = [a; b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers f continue sur I, alors la convergence est uniforme.

Prop 15 (comparaison série-intégrale) : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction positive, continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ ont même nature.

Application 16 : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'Euler

DO 118
RDO 119
RDO 116
ELA 159
GOU 239
GOU 242

II Fonctions convexes

1) Généralités [ROM]

Soit I un convexe d'un EVN $(E, \|.\|)$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

ROM 225 **Déf 17 :** On dit que f est convexe si : $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0;1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$.

On dit que f est concave si $-f$ est convexe.

ROM 227 **Exemple 18 :**
- Toute norme sur E est convexe.
- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
- Une fonction affine est convexe et concave sur $\mathbb{R}$.

ROM 225 **Théorème 19 :** f est convexe ssi son épigraphe $\mathcal{E}(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} ; y \geq f(x)\}$ est convexe dans $E \times \mathbb{R}$.

Théorème 20 : Soit I un intervalle réel. Alors $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout couple (A, B) de points du graphe de f où $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ et $a < b$, la courbe représentative de $f|_{[a;b]}$ est en dessous du segment $[AB]$.

Théorème 21 : f est convexe ssi pour tout couple (x,y) de points de I, la fonction $f_{x,y} : t \mapsto f((1-t)x + ty)$ est convexe sur $[0;1]$.

Prop 22 : 1) Une combinaison linéaire à coefficients réels positifs de fonctions convexes est convexe.
2) La composée d'une fonction convexe par une fonction convexe croissante est convexe.
3) Une limite simple de fonctions convexes est convexe.

Contre-ex 23 : 1) Le produit de 2 fonctions convexes n'est pas forcément convexe : $x \mapsto x^3 = x^2 x$ ne l'est pas.
2) La composée de 2 fonctions convexes n'est pas forcément convexe : $x \mapsto -x^2$ ne l'est pas.

2) Régularité des fonctions convexes [ROM]

Soit I un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$.

Théorème 24 : Si f est convexe sur I, f est continue sur $\mathring{I}$. ROM 231

Contre-ex 25 : La fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 0$ si $0 < x < 1$ et $f(0) = f(1) = 1$ est convexe non continue sur $[0;1]$

Théorème 26 : On a équivalence entre :
1) f est convexe
2) $\forall x < y < z \in I$, on a :
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$
3) $\forall a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$

Corollaire 27 : Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est affine ssi elle est convexe et concave.

Corollaire 28 : Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante ssi elle est convexe et majorée.

Théorème 29 : Si f est convexe sur I et dérivable en $a \in \mathring{I}$, et que $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a.

Théorème 30 : Si f convexe sur I admet un minimum local, alors ce minimum est global.

Théorème 31 : Si f est convexe sur I, elle admet une dérivée à droite et à gauche en tout point de $\mathring{I}$.

Contre-ex 32 : La fonction $x \mapsto |x|$ est convexe sur $[-1;1]$ mais n'est pas dérivable en 0.

Théorème 33 : Soit f dérivable sur I. On a équivalence :
1) f est convexe sur I.
2) f' est croissante sur I.
3) La courbe de f est située au dessus de sa tangente en tout point de I.

Théorème 34 : Soit f deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe ssi $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$.

Exemple 35 : La fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ est convexe.

III Applications

1) Inégalité de convexité [ROM][GOU]

ROM 39 **Exemples 36 :**
- $e^x \geq x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\ln(x) \leq x-1 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
- $\sin(x) \leq x \quad \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

Prop 37 (Inégalité de Young) : Soit $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Alors : $u^{1/p} v^{1/q} \leq \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v \quad \forall u, v \in \mathbb{R}_+^*$

ROM 37 **Prop 38 (Inégalité de Hölder) :** Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Alors : $\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$.

GOU 97 **Prop 39 (inégalité de Minkowski) :** Soit $p \geq 1$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Alors : $\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$ DEV 2

Remarque 40 : Cela fait de $N(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

ROM 242 **Déf 41 :** Soit $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de réels > 0. On note

$H(x) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$; $G(x) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$; $A(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique de x.

Prop 42 : On a : $H(x) \leq G(x) \leq A(x)$.

2) En probabilités [CHA][KUR]

CHA 23 **Exemple 43 :** Soit x une variable aléatoire réelle : La fonction de répartition de x est la fonction $F_x : \mathbb{R} \to [0;1]$ définie par $F_x(t) = \mathbb{P}(x \leq t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
Cette fonction est croissante et est continue à droite. Ainsi l'ensemble de ses points de discontinuité (donc des atomes de $\mathbb{P}_x$) est au plus dénombrable.

KUR 169 **Théorème 44 (inégalité de Jensen) :** Soit x une variable aléatoire intégrable à valeurs dans I intervalle ouvert I. Soit f une fonction convexe de I dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$f(\mathbb{E}[x]) \leq \mathbb{E}[f(x)].$$

Exemple 45 : Sous réserve d'existence :
- $|\mathbb{E}[x]| \leq \mathbb{E}[|x|]$
- $\mathbb{E}[x]^2 \leq \mathbb{E}[x^2]$

CHA 16 **Lemme 46 (de Borel-Cantelli) :** Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements indépendants tel que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$.
Alors : $\mathbb{P}(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 1$.

KUR 380 **Théorème 47 (inégalité de Hoeffding) :** Soit $(x_n)_n$ une suite de VA réelles indépendantes. Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de réels tel que $\mathbb{P}(a_n \leq x_n \leq b_n) = 1 \quad \forall n \geq 1$.
Soit $S_n = x_1 + \dots + x_n$. Alors $\forall x > 0$ et $\forall n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| > x) \leq 2 \exp\left(\frac{-2x^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \right)$$

ANNEXE [GOU]

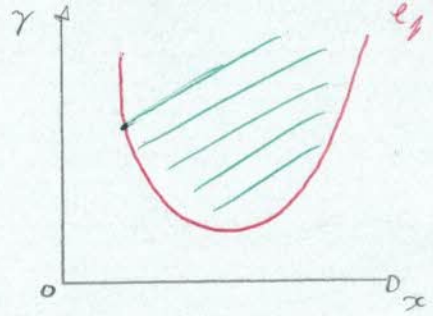

Figure 1 : Ø

Epigraphe d'une fonction convexe

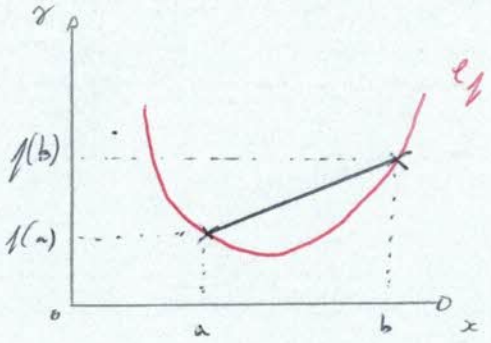

Figure 2 : Gou 96

Courbe d'une fonction convexe en dessous de ses cordes

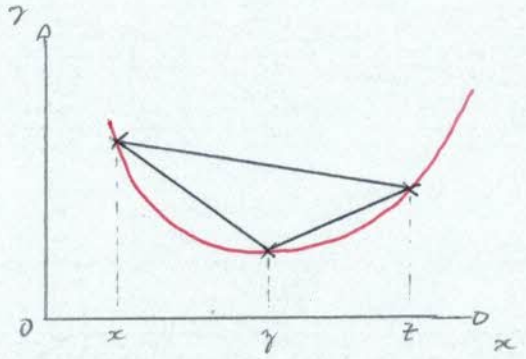

Figure 3 : Gou 96

Inégalité des trois pentes