

45 Leçon 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples d'applications.

I. Notion de continuité et dérivabilité

1. Fonctions continues [ROM]

Fonction continue, continue $\Rightarrow$ bornée dans un voisinage, continuité séquentielle, contre-exemples, prolongement par continuité, opérations

2. Fonctions dérivables [ROM] [GOU]

Fonction dérivable, classe C^1 , contre-exemple où la dérivée n'est pas continue, classe C^n , opérations, formule de Leibniz

II. Théorèmes fondamentaux

1. Théorème des valeurs intermédiaires [ROM]

$f(I)$ est un intervalle, TVI, théorème de Darboux, poly de degré impair, théorème de point fixe

2. Continuité et compacité [SKA] [GOU] [ELA]

Fonction uniformément continue, exemples, théorème des bornes atteintes

DEV 1 : théorème de Heine + applications

Polynômes de Bernstein, théorème de Weierstrass

3. Théorème des accroissements finis [GOU]

Lien extremum et dérivée, lemme de Rolle, théorème des accroissements finis, lien variations de f et dérivée, inégalité des accroissement finis

III. Etude de certaines fonctions

1. Suites de fonctions [ELA]

Continuité de la limite de la suite, contre-exemple, dérivabilité de la limite de la suite, contre-exemple, fonction zêta

2. Intégrales à paramètre [ZQ]

Théorème de continuité sous le signe intégrale, transformée de Fourier, théorème de dérivation sous le signe intégrale, DEV 2 : intégrale de Dirichlet

Présentation :

- Intuitivement, une fonction est continue si l'on peut tracer sa courbe représentative sans lever le stylo.
- Une fonction peut vérifier le TVI sans être continue : par exemple avec le théorème de Darboux.
- Pour étudier les variations d'une fonction, on se ramène à étudier le signe de sa dérivée. On place les résultats dans un tableau appelé tableau de variations.
- L'utilité du théorème de dérivation sous l'intégrale est qu'il permet par exemple de montrer qu'une intégrale vérifie une certaine équation différentielle, et donc obtenir une formule explicite de cette intégrale.

Développements :

- Théorème de Heine + 2 applications

- Topologie et analyse 3e année, Skandalis, p121
- Intégrale de Dirichlet
 - Calcul intégral, Candelpergher, p30 et 212
 - Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements, Bernis, p262
 - Oraux X-ENS Analyse 3, FGN, p214

Références :

- [ROM] Elements d'analyse réelle, Rombaldi
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [SKA] Topologie et analyse 3e année, Skandalis
- [ELA] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani
- [ZQ] Analyse pour l'agrégation, Queffelec-Zuily

Leçon 228: Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Notion de continuité et dérivabilité

1) Fonctions continues [ROM]

Déf 1: On dit que la fonction f est continue en $d \in I$ si $\lim_{x \rightarrow d} f(x) = f(d)$, c'est-à-dire si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]d - \delta, d + \delta[, |f(x) - f(d)| < \epsilon$$

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I .

Prop 2: Si f est continue en $d \in I$, elle est alors bornée sur un voisinage de d .

Exemple 3: Une fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$.

o $\forall n \in \mathbb{N}, x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4: La fonction f est continue en $d \in I$ si et seulement si toute suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I qui converge vers d , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(d)$.

Théorème 5: f est continue sur I si l'image réciproque par f de tout ouvert (resp fermé) de $\mathbb{R}$ est un ouvert (resp fermé) de I .

Exemple 6: La fonction définie par $f(x) = 0$ et $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ n'est pas continue en 0.

Exemple 7: La fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Théorème 8: Soit $d \in I$ et $d \in I$. Si f a une limite l en d , il existe un unique prolongement de f à $I \cup \{d\}$ qui est continue en d . Il est défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $\tilde{f}(d) = l$.

Exemple 9: Pour $d > 0$ et $p > 0$, la fonction $f: x \mapsto x^d \sin(\frac{1}{x^p})$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0 avec $f(0) = 0$.

Théorème 10: Soit $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ continues en $d \in I$. Alors les fonctions $|f|$, $f + g$, $f - g$, $\min(f, g)$, et $\max(f, g)$ sont continues en d .

Théorème 11: Si f est continue en d , I intervalle contenant $f(I)$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $f(d)$, alors $g \circ f$ continue en d .

2) Fonctions dérivables [ROM] [GOU]

Déf 12: On dit que f est dérivable en $d \in I$ si la fonction $\varphi_d: x \in I \setminus \{d\} \mapsto \frac{f(x) - f(d)}{x - d}$ admet une limite en d .

On note alors $f'(d)$ cette limite, appelé nombre dérivé de f en d .

Prop 13: Si f est dérivable en $d \in I$, f est continue en d .

Contre-ex 14: $x \mapsto |x|$ est continue mais pas dérivable en 0.

Déf 15: On dit que f est de classe C^1 sur I si elle est dérivable en tout point de I et si f' est continue sur I .

Contre-ex 16: La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$ et $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ est dérivable en 0 mais f' n'est pas continue en 0.

Déf 17: Par récurrence, on peut définir la dérivée n -ième par $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', \dots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

On dit que f est de classe C^n si $f^{(n)}$ existe sur I et f est continue. On dit que f est de classe C^∞ si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Prop 18: Soit $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en $d \in I$. Alors :

1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f + \mu g$ est dérivable en d avec $(\lambda f + \mu g)'(d) = \lambda f'(d) + \mu g'(d)$.

2) f, g est dérivable en d avec $(fg)'(d) = f'(d)g(d) + f(d)g'(d)$.

3) Si $g(d) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en d et $(\frac{f}{g})'(d) = \frac{f'(d)g(d) - f(d)g'(d)}{g(d)^2}$.

Prop 19 (formule de Leibniz): Soit f et g n fois dérivables sur I . Alors f, g est n fois dérivable sur I avec :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Prop 20: Soit I et J deux intervalles, $f: I \rightarrow J$ dérivable en $d \in I$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $f(d)$. La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et dérivable en d avec $(g \circ f)'(d) = g'(f(d)) \cdot f'(d)$.

II Théorèmes Fondamentaux

1) Théorème des valeurs intermédiaires [Pon]

Théorème 20: Si I intervalle réel et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f(I)$ est un intervalle.

Contre-ex 21: Si $I = [0, 2]$ et $f(x) = 1 \sin [0, \pi]$ et $f(x) = 2 \sin [1, 2]$ alors f est continue sur $I \setminus \{1\}$ et $f(I) = \{1, 2\}$.

Théorème 22 (TVI): Si $I = [a, b]$ avec $a < b$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue tel que $f(a)f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet alors au moins une solution $x \in]a, b[$.

Théorème 23 (de Darboux): Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires: $f'(I)$ est un intervalle.

Application 24: Tout polynôme de degré impair admet une racine réelle.

Application 25: Soit $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue. Alors f admet au moins un point fixe.

2) Continuité et compacité [SKA][GOU][ELA]

Déf 26: On dit que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I$ tel que $|x - y| < \delta, |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Prop 27: Toute application uniformément continue est continue.

Exemple 28: L'application $f: x \mapsto \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Contre-ex 29: La fonction carrée est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 30 (des bornes atteintes): Si $I = [a, b]$ est un compact et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 31 (de Heine): Toute application continue sur un compact de $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

Corollaire 32: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n})$$

DEV 1

Corollaire 33: Toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique est uniformément continue.

Déf 34: Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle n -ième polynôme de Bernstein associé à f , le polynôme $B_n(f)$ tel que: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$.

Prop 35: Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors la suite $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Théorème 36 (de Weierstrass): Toute fonction f continue sur un intervalle compact $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômiques.

Application 37: Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue tel que $\int_0^1 f(x) x^n dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Alors f est la fonction nulle.

3) Théorème des accroissements finis [GOU]

Prop 38: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f admet un extremum relatif en $c \in \mathbb{R}$ et si $f'(c)$ existe, alors $f'(c) = 0$

Contre-ex 39: La réciproque est fautive. Par exemple pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local.

Lemme 40 (de Rolle): Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que:

1) f est continue sur $[a, b]$ 2) $f(a) = f(b)$

3) f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 41 (des accroissements finis): Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors: $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Corollaire 42: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et

dérivable sur $]a, b[$. Alors f est croissante ssi $f'(x) \geq 0$
 $\forall x \in]a, b[$.

Elle est constante ssi $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$.
 Contre-ex 43: La demi-circonférence de Rolle est fautive si f est à valeurs
 dans un IR-EVN. Par exemple, $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$
 vérifie $f(0) = f(\pi)$ mais $f'(t) \neq 0 \quad \forall t \in]0, \pi[$.

Théorème 44 (intégrabilité des accroissements finis): Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe
 $M > 0$ tel que $|f'(t)| \leq M \quad \forall t \in]a, b[$, alors
 $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.

III Etude de certaines fonctions

1) Suites de fonctions [ELA]

Théorème 45: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$
 qui converge uniformément vers f . Si les fonctions
 f_n sont toutes continues au point $a \in I$, alors f est
 continue en point a .

Contre-ex 46: La suite (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = e^{-nx}$
 converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers f tel que $f(x) = 0$ pour
 $x > 0$ et $f(0) = 1$. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$
 mais pas f . Donc la convergence n'est pas uniforme.

Théorème 47: Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables
 sur I , qui converge simplement vers f . Pour que f
 soit dérivable sur I , il suffit que la suite (f'_n)
 converge uniformément sur I . Et alors on a:

$\forall x \in I, f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.
Contre-ex 48: Soit $f_n(x) = (x^2 + \frac{1}{n})^{1/2}$ pour $n \geq 1$.

Cette suite converge uniformément vers $f: x \mapsto |x|$. Or
 les f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$, mais f n'est pas dérivable
 en 0.

Exemple 49: La fonction $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ est de

classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et: $f^{(h)}(x) = (-1)^h \sum_{n=h}^{\infty} \frac{\ln(n)^h}{n^x}$ 142

2) Intégrales à paramètre [ZQ]

Soit (x, t, μ) un espace mesuré. Soit $f: \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$. On
 pose: $F(t) = \int_X f(t, x) d\mu(x)$.

Théorème 50 (continuité sous le signe intégrale): Soit:

- $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto f(t, x)$ est mesurable
- $\mu(x) - pp, t \mapsto f(t, x)$ est continue en $t_0 \in \mathbb{R}$
- il existe $g \in L^1(X)$ positive tel que
 $|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \mu(x) - pp$

Alors la fonction F est continue en t_0 .

Application 51: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors sa transformée de
 Fourier $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt$ pour $\omega \in \mathbb{R}$ est bien
 définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 52 (dérivation sous le signe intégrale): On
 prend ici $f: I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sur I intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose:

- $\forall t \in I, x \mapsto f(t, x)$ est dans $L^1(X)$
- $\forall x \in X, t \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur I .
- pour tout compact K de I , il existe $g_K \in L^1(X)$
 positive tel que: $| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) | \leq g_K(x) \quad \forall t \in K, \mu(x) - pp$

Alors:

- $\forall t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ est dans $L^1(X)$
- la fonction F est dérivable sur I et
 $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x)$.

Application 53 (intégrale de Dirichlet): En étudiant

la fonction $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$, on en déduit

que: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

DEV 2