

43 Leçon 223 : Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

I. Convergence des suites numériques

1. Limites d'une suite [ELA]

Limite, suite CV/DV, $CV \Rightarrow$ bornée, opérations sur les limites, moyenne de Cesaro

2. Valeurs d'adhérence [ELA]

Sous-suite, valeur d'adhérence, $CV \Rightarrow$ unique valeur d'adhérence, contre-exemple, cas des suites extraites paires et impaires

II. Le cas des suites réelles

1. Théorèmes généraux [ELA]

Inégalités de limites, théorèmes des gendarmes, CV dans le cas complexe, DV vers $+\infty/-\infty$, suite croissante/décroissante, théorème de la limite monotone, suites adjacentes

2. Suites bornées [ROM]

Lemme du soleil levant, théorème de Bolzano-Weierstrass, corollaires avec les compacts, théorème de Heine, limsup et liminf, lien avec les valeurs d'adhérence, lien avec la CV

III. Suites particulières

1. Suites de Cauchy [ELA]

Suit de Cauchy, propriétés, EVN complet, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets mais pas $\mathbb{Q}$, DEV 1 : théorème du point fixe de Banach-Picard et théorème du point fixe itéré

2. Séries numériques [ELA]

Série, suite des sommes partielles, convergence, somme, série géométrique, reste, $\lim u_n = 0$, cas de CV des SATGP, théorème de comparaison, théorème d'équivalence

DEV 2 : développement asymptotique de la série harmonique

Présentation :

- Dans de nombreuses situations, on cherche à connaître l'évolution d'un phénomène modélisé par une suite. On veut donc comprendre son comportement dans le futur, ce qui conduit à la définition de limite.
- Avec l'exemple de la suite $((-1)^n)_n$, on observe que cette suite ne converge pas mais que ses termes pairs et impairs sont des suites constantes donc convergent. Cela conduit à la notion de suites extraites et de valeurs d'adhérence.
- On a un théorème qui nous dit qu'étudier la convergence d'une suite complexe revient à étudier la convergence de ses parties réelles et imaginaires. Cela justifie le fait de s'intéresser en particulier aux suites réelles.
- L'utilité des suites de Cauchy dans les espaces complets est qu'elles permettent de démontrer qu'une suite converge ou non, sans avoir besoin de connaître la limite.
- Quand une suite diverge, il peut être intéressant de savoir « comment » elle diverge, c'est-à-dire à la même vitesse que quelle autre suite.

Développements :

- Théorème du point fixe de Banach-Picard et théorème du point fixe itéré

- Mathématiques pour l'agrégation, Analyse et probabilités, Dantzer, p146
- Topologie, Queffelec p185
- Développement asymptotique de la série harmonique
 - L'Oral a l'agrégation de mathématiques, Isenmann et Pecatte, p380
 - Orlaux X-ENS 3, FGN, p224

Références :

- [ELA] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani
- [ROM] Eléments d'analyse réelle, Rombaldi

Leçon 2.2.3 : Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(m_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$.

I Convergence des suites numériques

1) Limite d'une suite [ELA]

Def 1 : On dit que (m_n) admet $l \in K$ pour limite si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |m_n - l| \leq \varepsilon$.

Théorème 2 : On a unicité de la limite.

Def 3 : On dit que (m_n) est convergente si elle admet une limite. Sinon, on dit qu'elle est divergente.

Exemple 4 : Si $m_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \quad \forall n \geq 1, (m_n)$ converge vers 1.

Prop 5 : Toute suite convergente est bornée.

Contre-ex 6 : $(-1)^n$ est bornée mais divergente.

Prop 7 : Soit $(v_n)_n$ une suite numérique bornée. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = 0$. Alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} (m_n v_n) = 0$.

Exemple 8 : La suite $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

Prop 9 : Soit $l, l' \in K$ tel que $m_n \rightarrow l$ et $v_n \rightarrow l'$.

Soit $\lambda \in K$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda m_n + v_n) = \lambda l + l' \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (m_n v_n) = l \cdot l'$$

Def 10 : On appelle suite des moyennes de Cesàro de $(m_n)_{n \geq 0}$ la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m_k$.

On dit que (m_n) converge en moyenne de Cesàro si $(v_n)_n$ converge.

Prop 11 : Si (m_n) converge vers l , elle converge en moyenne de Cesàro vers l .

Contre-ex 12 : La réciproque est fautive. La suite $m_n = (-1)^n$ est divergente mais converge en moyenne de Cesàro vers 0.

2) Valeurs d'adhérence [ELA]

Def 13 : On appelle sous-suite ou suite-extraite de $(m_n)_n$, toute suite $(m_{\ell(n)})_n$ où ℓ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Prop 14 : Si (m_n) converge vers l , alors toute suite extraite de (m_n) est convergente et admet pour limite l .

Def 15 : On appelle valeur d'adhérence de (m_n) tout élément de K limite d'une suite extraite de (m_n) .

Prop 16 : Toute suite convergente ne possède que sa limite comme valeur d'adhérence.

Exemple 17 : La suite $(-1)^n$ admet 1 et -1 comme valeurs d'adhérence, donc est divergente.

Contre-ex 18 : La suite de terme général $m_n = (1 - (-1)^n)^n$ ne possède que 0 comme valeur d'adhérence, mais elle ne converge pas car $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{2n+1} = +\infty$.

Prop 19 : Soit $l \in K$. Alors $(m_n)_n$ converge vers l si et seulement si les sous-suites (m_{2n}) et (m_{2n+1}) convergent vers l .

II Le cas des suites réelles

On suppose ici que $K = \mathbb{R}$ et $(m_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1) Théorèmes généraux [ELA]

Lemme 20 : On suppose que (m_n) est convergente. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1) Si $m_n > a$ APCR, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n > a$.

2) Si $m_n \leq a$ APCR, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n \leq a$.

Théorème 21 (des gendarmes) : Soit $(m_n), (n_n), (b_n)$ trois suites réelles tel que APCR, on ait $a_n \leq m_n \leq b_n$. Si (a_n) et (b_n) sont convergentes de même limite l , alors (m_n) converge vers l .

Prop 22 : Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Soit $l, l' \in \mathbb{R}$. On pose $z_n = u_n + i v_n \quad \forall n$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l + i \cdot l' \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l' \end{cases}$$

Déf 23: On dit que (m_n) tend vers $+\infty$ si:
 $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, m_n \geq A$.

On dit que (m_n) tend vers $-\infty$ si:
 $\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, m_n \leq B$

Prop 24: On suppose que $m_n \leq v_n$ APCR. Alors:
 1) Si $m_n \rightarrow +\infty, v_n \rightarrow +\infty$
 2) Si $v_n \rightarrow -\infty, m_n \rightarrow -\infty$

Déf 25: On dit que la suite (m_n) est croissante (resp décroissante) si pour tout $n \geq 0, m_n \leq m_{n+1}$ (resp $m_n \geq m_{n+1}$). On dit que (m_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Théorème 26 (de la limite monotone):
 Si (m_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente.
 Si (m_n) est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Déf 27: On dit que (m_n) et (v_n) sont adjacentes si:
 1) (m_n) est croissante et (v_n) est décroissante
 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (m_n - v_n) = 0$

Théorème 28: Si (m_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus,
 on a: $m_n \leq l \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple 29: Les suites définies par $m_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

2) Suites bornées [RDM]

Lemme 30: De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone.

Théorème 31 (de Bolzano-Weierstrass): Toute suite réelle

bornée admet une sous-suite convergente.
Corollaire 32: Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés-bornés.
Corollaire 33: Une suite réelle est convergente ssi elle est bornée et n^a qu'une seule valeur d'adhérence.

Théorème 34 (de Heine): Soit $a \leq b \in \mathbb{R}$. Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur $[a; b]$.

Théorème 35: Soit (x, d) un espace compact et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de x tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est une sous-compact de x . DEV 2

Application 36: Soit $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in [0; 1]$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Cadre: Soit $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sup_{p \geq n} m_p$ et $w_n = \inf_{p \geq n} m_p$.

Lemme 37: La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée et la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante majorée.

Déf 38: La limite supérieure de $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est:

$$l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{p \geq n} m_p = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{p \geq n} m_p$$

La limite inférieure de $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est:

$$l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{p \geq n} m_p = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{p \geq n} m_p$$

Lemme 39: l_1 et l_2 sont des valeurs d'adhérence de $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et si l est une valeur d'adhérence de (m_n) , $l_1 \leq l \leq l_2$.
 Ainsi l_2 est la + grande valeur d'adhérence et l_1 est la + petite valeur d'adhérence de $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 40: La suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ssi:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} m_n$.

III Suites particulières

1) Suites de Cauchy [ELA]

Déf 41: On dit qu'une suite numérique (u_n) est une suite de Cauchy si: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq N, \forall n \geq N, |u_m - u_n| \leq \varepsilon$.

Prop 42: 1) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

2) Toute suite de Cauchy est bornée.

3) Toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence est convergente.

Centre-ex 43: La suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ n'est pas convergente car elle n'est pas de Cauchy.

Déf 44: Un espace-vectoriel normé est dit complet si toute suite de Cauchy y est convergente.

Théorème 45: $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces complets.

Centre-ex 46: $\mathbb{Q}$ n'est pas complet

2) Séries numériques [ELA]

Déf 47: On appelle série de terme général u_n , la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. On la note $\sum u_n$, et S_n s'appelle la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$.

Déf 48: On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite (S_n) converge. Sa limite, notée S , s'appelle la somme de la série et on écrit: $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Exemple 49: Si $|a| < 1$, la série $\sum a^n$ converge. Ses sommes partielles sont $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Déf 50: Si $\sum u_n$ converge vers S , le nombre $R_n = S - S_n$ est appelé le reste d'ordre n de la série.

Prop 51: Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Centre-ex 52: La réciproque est fautive. Prendre par exemple $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) \quad \forall n \geq 1$.

Prop 53: Une série à termes réels positifs converge ssi la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est majorée.

Si non, la suite $(S_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Théorème 54: Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors:

- 1) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi.
- 2) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi.

Théorème 55: Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs tel que $u_n \sim v_n$ quand $n \rightarrow +\infty$. Alors:

- 1) Les séries sont de même nature.
- 2) En cas de convergence, les restes sont équivalents.
- 3) En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

Exemple 56: La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^d}$ converge ssi $d > 1$.

Lemme 57: Soit $d > 1$. Alors quand $n \rightarrow +\infty$:

$$R(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^d} \sim \frac{1}{d-1} \frac{1}{n^{d-1}}$$

Application 58 (développement asymptotique de la série harmonique):

Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que quand $n \rightarrow +\infty$:

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$