

41 Leçon 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

I. Existence et unicité d'extremums

1. Définition et premières propriétés [ELA] [ROM]

Maximul local et global, extremum, extremum $\Rightarrow$ point critique, contre-exemple

2. Compacité et coercitivité [GOU] [BMP]

Théorème des bornes atteintes, distance entre deux compacts, théorème de point fixe sur un compact, fonction coercive, prop, distance à un SEV de dim finie

3. Fonctions convexes [ROM] [ROU] [BMP]

Fonction convexe, épigraphe, DEV 1 : critères de convexité d'une fonction différentiable et recherche d'extremums, min local $\Rightarrow$ min global

II. Cadres spécifiques

1. Dans un espace de Hilbert [LI] [BMP]

DEV 2 : Théorème de projection sur un convexe fermé

L'application P_C est 1-lipschitzienne, théorème de projection sur un SEV fermé, théorème de représentation de Riesz, existence de l'adjoint, existence du gradient

2. En analyse complexe [TAU] [BMP]

Inégalités de Cauchy, théorème de Liouville, théorème de d'Alembert-Gauss, principe du maximum local et global

III. Utilisation du calcul différentiel

1. Condition du premier ordre [ELA] [ROM]

Point critique, extremum $\Rightarrow df(a) = 0$, contre-exemples, lemme de Rolle, TAF, lien avec les variations de f

2. Condition du second ordre [ELA] [BMP] [GOU]

Minimum local $\Rightarrow d^2f(a)$ est positive, $d^2f(a)$ est définie positive $\Rightarrow$ minimum local strict, contre-exemples, cas de la dimension 2, exemple

Annexe :

- Schéma projection sur un convexe fermé [BMP]

Présentation :

- L'optimisation est la branche des mathématiques qui s'intéresse à trouver les maximums et minimums d'une fonction. Le but est de trouver un point qui réalise cet extremum. On peut aussi se demander si ce point est unique.
- Dans un EVN de dimension finie, la distance à un fermé est toujours atteinte grâce à la coercitivité de la norme.
- Les fonctions convexes sont très utiles en optimisation car pour celles-ci, les conditions nécessaires d'extremum sont en fait suffisantes.
- La minimisation de la distance d'un point x à un convexe fermé non vide dans un espace de Hilbert est un problème agréable : il y a existence et unicité du point minorant. De plus, on dispose d'une condition nécessaire et suffisante de minimalité : la caractérisation angulaire de la projection.

- Dans le cas où $K = \mathbb{R}$, la caractérisation du projeté exprime que $P_C(x)$ est l'unique point y de C tel que pour tout $z \in C$, l'angle formé par les vecteurs $x - y$ et $z - y$ est obtus (supérieur ou égal à $\pi/2$).
- La conclusion du théorème de projection reste vraie si l'on suppose seulement que H est un espace préhilbertien et que le convexe C est complet pour la distance induite.
- En analyse complexe, pour des fonctions holomorphes, la propriété de la moyenne s'oppose à l'existence de maximums locaux.
En revanche, il peut y avoir des minimums locaux. Par exemple $f(z) = z$ sur $D(0, 1) : |f|$ admet son minimum en $z = 0$. Il peut être utile d'appliquer le principe du maximum à $\frac{1}{f}$ pour obtenir des propriétés de minimalité pour f .
- Pour étudier le sens de variation d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée et on consigne les résultats dans un tableau, appelé tableau de variations.
- Grâce au théorème de Schawrz, la différentielle seconde est une forme quadratique et la hessienne est une matrice symétrique. Avec la méthode de réduction de Gauss, on peut trouver la signature de $\text{Hess}(f)$ qui va nous donner le nombre de valeurs propres strictement positives et strictement négatives. Cela va être très utile par exemple en dimension 2.
- Lorsque l'on recherche des extremums, on peut penser à :
 - Utiliser des arguments de compacité.
 - Regarder si la fonction est convexe.
 - Regarder si la fonction est coercive.

Développements :

- Théorème de projection sur un convexe fermé + corollaire sur π_C
- Cours d'analyse fonctionnelle, Daniel LI, p32
- Critères de convexité d'une fonction différentiable
- Petit Guide de Calcul Différentiel, Rouvière, p127-329-381

Références :

- [ELA] Calcul différentiel, El Amrani
- [ROM] Elements d'analyse réelle, Rombaldi
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [BMP] Objectif Agrégation, Beck-Malick-Peyré
- [ROU] Petit Guide de Calcul Différentiel, Rouvière
- [LI] Cours d'analyse fonctionnelle, Daniel LI
- [TAU] Analyse complexe pour la Licence 3, Tauvel

Delem 2.9 : Extremums : existence, caractérisation, recherche Exemples et applications

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -E.V.N., U un ouvert non vide de E et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

I Existence et limites d'extremums

1) Définition et premières propriétés [ELA][RON]

Déf 1 : Soit $A \subseteq E$. On dit que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum local en $a \in A$ s'il existe un voisinage V de a tel que :

$\forall x \in V \cap A, f(x) \leq f(a)$.

Si cette inégalité est vraie pour tout $a \in A$, on dit que f admet un maximum global en a .

On définit de manière analogue la notion de minimum local et global.

Si les inégalités sont strictes pour $x \neq a$, on parle de maximum (ou de minimum) strict.

Remarque 2 : Le terme extremum désigne un max ou un min.

Prop 3 : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$. Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

Contre-ex 4 : La réciproque est fautive, prendre $f(x) = x^3$ au voisinage de 0.

2) Compacts et coercivité [Louv][BMP]

Théorème 5 (des bornes atteintes) : On suppose que E est compact, et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes. Ainsi il existe $c, d \in E$ tel que :

$$f(c) = \inf_{x \in E} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \sup_{x \in E} f(x)$$

Contre-ex 6 : La compacité est importante. Sur $\mathbb{R}$, la fonction arctan est bornée mais n'atteint pas ses bornes.

Application 7 : Soit K_1 et K_2 deux compacts de E . Alors il existe $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tel que $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$.

Application 8 : Soit (E, d) compact et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$\forall x, y \in E$ avec $x \neq y, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Alors f admet un unique point fixe.

Déf 2 : On dit que f est coercive si $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$.

Prop 10 : On suppose que E est de dimension finie et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. Si C est un fermé de E et f est coercive, alors f est minorée sur C et atteint son minimum.

Prop 11 : Soit F un S.E.V. de E de dimension finie. Pour tout $x \in E$, il existe $x^* \in F$ tel que $\|x - x^*\| = \inf_{y \in F} \|x - y\| = d(x, F)$.

3) Fonctions convexes [RON][Louv][BMP]

Soit I un convexe de $(E, \|\cdot\|)$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Déf 12 : On dit que f est convexe si : $\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

On dit que f est strictement convexe si cette inégalité est stricte pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$.

Prop 13 : f est convexe si son épigraphe $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$ est convexe dans $E \times \mathbb{R}$.

Exemple 14 : Toute norme est convexe.

Théorème 15 : Soit U un ouvert convexe de E et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Soit f différentiable sur U . Alors f est convexe si :

$$f(y) - f(x) \geq df(x)(y - x) \quad \forall x, y \in U$$

Théorème 16 : Soit U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur U . Alors f est convexe si $d^2 f$ est une forme quadratique positive en tout point u :

$$d^2 f(u)(h, h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u) h_i h_j \geq 0 \quad \forall u \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Application 17 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $f: x \mapsto \langle Ax, x \rangle$. Alors f est convexe si A est positive.

Corollaire 18 : Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et différentiable en $u \in U$, avec $df(u) = 0$, alors f admet un minimum global en u sur U .

Corollaire 19 : Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable avec $df(u) = 0$ et $d^2 f(u)(h, h) > 0 \quad \forall u \in U$ et $\forall h \in \mathbb{R}^n$, alors f admet un minimum global en u .

Prop 20: Si f est convexe et admet un minimum local, alors c'est un minimum global.

III Cadres spécifiques

1) Dans un espace de Hilbert [Li][DMP]

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme $\|\cdot\|$ associée.

Lemme 21 (identité du parallélogramme): Pour tout $x, y \in H$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Théorème 22 (de projection): Soit C une partie de H convexe et fermée, non vide. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que:

$$\|x-y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x-z\|$$

On dit que $y = p_C(x)$ est la projection de x sur C . Il est caractérisé par:

$$\langle x-y, z-y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C.$$

Corollaire 23: L'application $p_C: H \rightarrow C$ est 1-lipschitzienne: $\forall x_1, x_2 \in H: \|p_C(x_1) - p_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|.$

Théorème 24: Soit F un SEV fermé de H , alors $p_F: H \rightarrow F$ est une application linéaire continue et $p_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que: $y \in F$ et $x-y \in F^\perp$.

On a: $H = F \oplus F^\perp$

Corollaire 25: Soit F un SEV de H . Alors F est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

Théorème 26 (de représentation de Riesz): Pour toute forme linéaire continue $\phi \in H^*$, il existe un unique $y \in H$ tel que $\phi(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H$.

Prop 27: Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe $T^* \in \mathcal{L}(H)$ appelé adjoint de T , tel que, $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in H$.
De plus $\|T\| \|T^*\| = \|T\|^2$.

Application 28: Soit $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en $a \in H$. On en déduit l'existence du gradient $\nabla f(a)$ qui est tel que: $df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle \quad \forall h \in H$.

2) En analyse complexe [TAU][DMP]

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$.

Théorème 29 (inégalité de Cauchy): Soit $R > 0$ et $f \in \mathcal{H}(D(0, R))$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D(0, R)$:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{|w|=R} |f(w)|$$

Théorème 30 (de Liouville): Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.

Théorème 31 (de d'Alembert-Legendre): $\mathbb{C}$ est algébriquement clos: tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et non constant a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème 32 (principe du maximum local): Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Si $|f|$ admet un maximum local en $a \in U$, alors f est constante dans un voisinage de a .

Théorème 33 (principe du maximum global): Soit U un ouvert connexe et borné dans $\mathbb{C}$. Soit f continue sur $\bar{U}$ et holomorphe sur U . Soit M le maximum de $|f|$ sur la frontière de U . Alors:

- $\forall z \in U, |f(z)| \leq M$
- S'il existe $z_0 \in U$ tel que $|f(z_0)| = M$ alors f est constante sur U .

III Utilisation du calcul différentiel

On se place sur $E = \mathbb{R}^n$ et U ouvert non vide de E

1) Condition du premier ordre [ELA][ROM]

Def 34: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. On dit que f admet un point critique en a si $df(a) = 0$.

Prop 35: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. Si f admet un extremum local en a , alors $df(a) = 0$

Contre-ex 36: $\bullet$ Il faut que U soit un ouvert. Par exemple $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^2$ admet un maximum en 1 mais $f'(1) = 2 \neq 0$.

$\bullet$ Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = |x|$ alors 0 est un minimum global mais ce n'est pas un point critique.

Lemme 37 (de Rolle): Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 38 (des accroissements finis): Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Corollaire 39: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I et dérivable sur I° , alors f est croissante sur I si $f'(x) \geq 0 \forall x \in I^\circ$.

2) Condition du second ordre [ELA][DMP][600]

Prop 40: Si f admet un minimum local en $a \in U$ et f est deux fois différentiable en a , alors $df(a) = 0$ et $d^2f(a)$ est une forme quadratique positive.

Prop 41: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable. On suppose que $a \in U$ est un point critique de f . Si $d^2f(a)$ est une forme quadratique définie positive, alors a est un minimum local strict de f .

Contre-ex 42: $\bullet$ Soit $f(x, y) = x^2 - y^3$. Alors $d^2f(0, 0)$ est positive mais $(0, 0)$ n'est pas un minimum local.

$\bullet$ Soit $f(x, y) = x^2 + y^4$. Alors $(0, 0)$ est un minimum strict mais $d^2f(0, 0)$ n'est pas définie positive.

Exemple 43: En dimension 2. Soit $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tel que $df(a) = 0$ avec $a \in U$. On pose

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

Alors:

- 1) Si $at - s^2 > 0$ et $a > 0$, f admet un minimum relatif en a .
- 2) Si $at - s^2 > 0$ et $a < 0$, f admet un maximum relatif en a .
- 3) Si $at - s^2 < 0$, f n'a pas d'extremum en a .
- 4) Si $at - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

Exemple 44: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(xy)^2$.

Alors f a trois points critiques: $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Or on que $(0, 0)$ est un point selle et les deux autres sont des minimums relatifs.

ANNEXE

$\bullet$ Projection sur un convexe fermé BPP 96