

40 [META PLAN] Leçon 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

I. Les formules de Taylor

1. Préliminaires [GOU]

Lemme de Rolle, TAF, contre-ex dans un $\mathbb{R}$ -EV, IAF

2. Fonctions d'une variable réelle [ROM] [GOU]

Formule de Taylor-Lagrange, inégalités classiques, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Young

3. Fonctions de plusieurs variables [ELA2]

Lien avec $\mathbb{R}$ pour les démos, formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young, exemple avec classe C^2

II. Applications

1. Développements limités [ROM] [GOU]

DL, unicité du DL, DL d'ordre 0 et d'ordre 1, contre-exemple avec DL à l'ordre 2, n fois dérivable $\Rightarrow$ DL à l'ordre n , DL usuels, utilisation pour les formes indéterminées, développement asymptotique de la série harmonique

2. Développement en série entière [ELA1]

Fonction DSE en 0, DSE $\Rightarrow C^\infty$, contre-ex, équivalence avec la convergence du reste vers 0, condition suffisante avec la majoration des dérivées

3. Fonctions convexes [ROU]

Fonction convexe, DEV 1 : critères de convexité d'une fonction différentiable, regarder dans $\mathbb{R}$, lien avec la recherche de minimum

4. En probabilités [CHA]

Fonction caractéristique, CV en loi, lien entre Φ_X et les moments, théorème de Lévy, DEV 2 : théorème central limite, formule de Stirling

Présentation :

- Historiquement, les fonctions les plus simples à calculer furent les fonctions polynomiales. C'est pourquoi l'on a cherché à approcher les fonctions par de telles fonctions.
- Les formules de Taylor vont permettre de généraliser et de préciser le théorème des accroissements finis.
- Quand on a une formule de Taylor, elle se divise en deux parties : un polynôme en x de degré au plus n appelé polynôme de Taylor, et une deuxième partie appelée reste de Taylor. C'est la forme du reste qui va changer en fonction des hypothèses faites sur f .
- La formule de Taylor-Lagrange se démontre en utilisant le lemme de Rolle.
- La formule de Taylor avec reste intégrale se démontre par récurrence en faisant une IPP pour l'hérédité. Cette formule permet de retrouver l'inégalité de Taylor-Lagrange pour f de classe C^{m+1} (et pas $n+1$ fois dérivable) à valeurs dans un espace de Banach.
- La formule de Taylor-Young se démontre à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange. C'est une formule locale. A l'ordre 1, on retrouve la définition de la dérivabilité.
- Avec les DL usuels, on peut en un point précis approcher des fonctions par des polynômes.

Les DL permettent aussi de lever des formes indéterminées dans le calcul de limites.

- Pour démontrer les formules de Taylor pour une fonction f de plusieurs variables, il suffit d'appliquer les formules de Taylor à $\varphi: t \mapsto f(a + th)$ entre 0 et 1.
- Dans la preuve de la formule de Stirling avec le TCL, on utilise la formule de Taylor-Lagrange pour effectuer une majoration et appliquer un TCD.

Développements :

- Critères de convexité d'une fonction différentiable
- Petit Guide de Calcul Différentiel, Rouvière, p127-329-381
- Théorème central limite
- Analyse pour l'agrégation de mathématiques, Bernis, p200
- Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch, p57

Références :

- [GOU] Analyse, Gourdon
- [ROM] Elements d'analyse réelle, Rombaldi
- [ELA2] Calcul différentiel, El Amrani
- [ELA1] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani
- [ROU] Petit Guide de Calcul Différentiel, Rouvière
- [CHA] Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch

Leçon 218: Formules de Taylor. Exemples et applications

Dans cette leçon, on considère $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \leq b \in \mathbb{R}$.

I Les formules de Taylor

1) Préliminaires [600]

Lemme 1 (de Rolle): Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ tel que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 2 (de Darboux): Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires: f' est sur intervalle.

Théorème 3 (des accroissements finis): Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors: $\exists c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Remarque 4: Le lemme de Rolle et le TAF sont faux si f est à valeurs dans un IR-ev. Par exemple, l'appli: $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tq $f(t) = e^{it}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$ mais $f'(t) = ie^{it} \neq 0$. On a en revanche:

Théorème 5 (inégalité des accroissements finis): Soit E un IR-EVN. Soit $f: [a; b] \rightarrow E$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. S'il existe $M > 0$ tel que $\|f'(t)\| \leq M \forall t \in [a; b]$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M \cdot (b - a)$. Ainsi f est M-Lipschitzienne.

2) Fonctions d'une variable réelle [600] [600]

Théorème 6 (Formule de Taylor - Inégalité): Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a; b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a; b[$.

Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que:

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Remarque 7: pour $n=0$, on retrouve le TAF

Corollaire 8: Soit f une fonction $n+1$ fois dérivable sur I et $a \in I$. Alors $\forall x \in I$, il existe $c_x \in I$ tel que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Le premier membre est un polynôme en x de degré au plus n , appelé polynôme de Taylor. La seconde partie est appelée reste de Taylor.

Exemple 9: $\forall x > 0: x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$$\forall x > 0: x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{120}$$

Théorème 10 (inégalité de Taylor - Inégalité): Soit E un IR-EVN.

Soit $f: [a; b] \rightarrow E$ de classe C^n sur $[a; b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a; b[$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tq $\forall t \in]a; b[, \|f^{(n+1)}(t)\| \leq M$. Alors:

$$\|f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k\| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Théorème 11 (Formule de Taylor avec reste intégral): Soit

$f: [a; b] \rightarrow E$ de classe C^{n+1} sur $[a; b]$ avec E un espace de Banach. Alors:

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt$$

Remarque 12: Cette formule donne beaucoup d'informations sur le reste, mais a des hypothèses plus fortes.

Théorème 13 (Formule de Taylor - Young): Soit $u \in I$ et

$f: I \rightarrow K$ de classe C^n sur I . Alors:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(u)}{k!} (x-u)^k + (x-u)^m \cdot \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow u} \varepsilon(x) = 0$$

Rem 14: La formule de Taylor - Young est de nature locale.

3) Fonctions de plusieurs variables [EL 17]

Rem 15: Pour démontrer les formules de Taylor pour des fonctions de plusieurs variables, on applique à la fonction $t \mapsto f(a+th)$ ($t \in [0,1]$) les formules dans le cas réel.

Cadre 16: Soit $n, p \in \mathbb{N}$. On considère $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in U$.

Notation 17: On pose $d^k f(a)(h) = d^k f(a)(h, h, \dots, h)$

Théorème 18 (Formule de Taylor reste intégral): Si f est de classe C^{p+1} sur U et $[a, a+h] \subset U$, alors:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{d^k f(a)(h)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} d^{p+1} f(a+th)(h) dt$$

Exemple 19: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Alors:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^2 h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 h_k h_j \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a+th) dt$$

Théorème 20 (Formule de Taylor - Young): Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $p+1$ fois différentiable sur U et $[a, a+h] \subset U$. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{d^k f(a)(h)}{k!} + \frac{d^{p+1} f(a+\theta h)(h)}{(p+1)!}$$

Rem 21: Cette formule n'est vraie que pour des fonctions à valeurs réelles.

Théorème 22 (Formule de Taylor - Young): Si f est de classe C^p en a , alors lorsque h tend vers 0:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{d^k f(a)(h)}{k!} + o(\|h\|^p)$$

Exemple 23: Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 en a :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2)$$

II Applications

1) Développements limités [Ror] [Gou]

Dans cette partie, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f: I \rightarrow \mathbb{K}$.

Def 24: Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en point a s'il existe un polynôme P de degré $\leq n$ tel que:

$$f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n) \text{ au voisinage de } a.$$

Rem 25: On peut se restreindre à des DL en 0, grâce à faire un changement de variable.

Prop 26: Si f admet un DL en 0 d'ordre m , celui-ci est unique.

Prop 27: f est continue en 0 ssi elle admet un DL d'ordre 0 en 0

Prop 28: f est dérivable en 0 ssi elle admet un DL d'ordre 1 en 0.

Rem 29: Une fonction peut admettre un DL d'ordre 2 en 0 sans être deux fois dérivable en 0. Par exemple, $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

D'après la formule de Taylor - Young, on obtient:

Prop 30: Si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un DL d'ordre n en 0 donné par:
 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n)$

Ex 31: On obtient alors les DL en 0 respectifs:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^d = 1 + \sum_{k=1}^d \frac{d(d-1)\dots(d-k+1)}{k!} x^k + o(x^d)$$

Appli 32: les DL permettent de trouver la limite d'une forme indéterminée. Ex: $(1 + \frac{x}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$

Appli 33: les DL permettent d'obtenir des développements asymptotiques. Ex: la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ quand $n \rightarrow +\infty$

2) Développement en série entière [ELA1]

Fonction DSE en 0, DSE $\Rightarrow C^\infty$, centre-en avec $e^{-\frac{1}{x^2}}$, équivalence avec $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, conditions suffisantes avec la majoration des dérivées

3) Fonctions convexes [KOU]

Voir leçon 253

4) En probabilités [CHA]

Fonction caractéristique, CV en loi, lien dx et moments, Lt de Lévy, TCL, en Striking