

39 Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

I. Applications différentiables

1. Différentielle [ELA]

Fonction différentiable, différentielle, exemples, différentiable $\Rightarrow$ continue, stabilité par CL et composition, exemple de $\|\cdot\|$

2. Dérivées directionnelles et dérivées partielles [ELA]

Dérivée selon un vecteur, différentiable $\Rightarrow$ dérivée selon tout vecteur, contre-exemple, dérivée partielle, expression de la différentielle, matrice jacobienne, règle de la chaîne, gradient

II. Différentielle d'ordre supérieur

1. Applications de classe C^1 [ELA]

Fonction de classe C^1 , équivalence pour être C^1 , TAF, IAF, caractérisation des fonctions constantes, DEV 1 : différentielle du déterminant

2. Différentielle seconde [ELA]

Fonction deux fois différentiable, identification avec les applications bilinéaires continues, différentielle seconde, expression de la différentielle seconde, théorème de Schwarz, contre-exemple, matrice hessienne

III. Optimisation

1. Recherche d'extremas [ELA] [GOU]

Point critique, extremum $\Rightarrow df(a) = 0$, contre-exemple, minimum local $\Rightarrow d^2f(a)$ est positive, $d^2f(a)$ est définie positive $\Rightarrow$ minimum local strict, cas de la dimension 2, exemple

2. Le cas des fonctions convexes [ROU] [ROM]

Fonction convexe, DEV 2 : critères de convexité d'une fonction différentiable et recherche d'extremums, min local $\Rightarrow$ min global

Présentation :

- L'idée du calcul différentiel est que :

(accroissement de la fonction) = (terme linéaire par rapport à l'accroissement de la variable) + (petit terme correctif).

Au voisinage du point a , l'application f se comporte à peu près comme l'application affine $x \mapsto f(a) + df(a)(x - a)$.

- En dimension quelconque $df(a)$ dépend à priori des normes sur E et F . Cependant en dimension finie les normes sont toutes équivalentes donc le problème ne se pose pas. On a également que la différentielle est forcément continue car linéaire.
- La notion de dérivée directionnelle permet de quantifier la variation locale d'une fonction dépendant de plusieurs variables en un point donné et le long d'une direction donnée dans l'espace de ces variables.
- L'existence des dérivées partielles en un point n'implique pas la continuité en ce point, donc encore moins la différentiabilité en ce point.

- Comme $df(a)$ est une application linéaire, on peut la représenter par une matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$: il s'agit de la matrice jacobienne.
- L'existence du gradient pour une fonction différentiable découle du théorème de représentation de Riesz, car la différentielle de f en a est une forme linéaire continue (attention il faut absolument que f soit à valeurs dans $\mathbb{R}$).
- Le gradient est représenté par la transposée de la matrice à une ligne $\text{Jac } f(a)$.
- Le lemme de Rolle et le TAF sont faux lorsque f est à valeurs dans un $\mathbb{R}$ -EVN. Par exemple, l'application $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $f(t) = e^{it}$ vérifie $f(0) = 1 = f(2\pi)$ mais pourtant $f'(t) = ie^{it}$ n'est jamais nul.
- La matrice hessienne est la matrice de la forme bilinéaire $d^2f(a)$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Elle est symétrique sous les hypothèses du théorème de Schwarz.

Avec la méthode de réduction de Gauss, on peut trouver la signature de $\text{Hess}(f)$ qui va nous donner le nombre de valeurs propres strictement positives et strictement négatives. Cela va être très utile par exemple en dimension 2.

Développements :

- Différentielle du déterminant
 - Petit Guide de Calcul Différentiel, Rouvière, p83
 - Algèbre, Gourdon, p142
- Critères de convexité d'une fonction différentiable
 - Petit Guide de Calcul Différentiel, Rouvière, p127-329-381

Références :

- [ELA] Calcul différentiel, El Amrani
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [ROU] Petit Guide de Calcul Différentiel, Rouvière
- [ROM] Elements d'analyse réelle, Rombaldi

Leçon 215: Applications différentiables dérivées sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Soit $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et U un ouvert de E . Soit $a \in U$ et $f: U \rightarrow F$.

I Applications différentiables

1) Différentiable [ELA]

Déf 1: On dit que f est différentiable au point a s'il existe $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ tel que pour tout $h \in E$ on ait:
 $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$ quand $h \rightarrow 0$.

Prop 2: Dans ce cas, L est unique. Elle est notée $df(a)$.
 L'ensemble de f en a est noté $T_a f$.

Remarque 3: La différentiabilité généralise la dérivabilité.
 Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f est dérivable en a ssi f est différentiable en a et alors $f'(a) = df(a)(1)$.

Déf 4: On dit que f est différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U . On appelle différentielle de f l'application $df: U \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F)$.

Exemple 5: On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
 Soit $f(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$. Alors f est différentiable et

$$df(x)(h) = 2\langle x, h \rangle \quad \forall x \in E, \forall h \in E.$$

Prop 6: Si f est linéaire continue, alors f est différentiable sur E et $df(x) = f \quad \forall x \in E$.

Prop 7: Si $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ est bilinéaire continue, alors f est différentiable sur $E \times F$ et $df(h, k) \in F$.

$$df(x, y)(h, k) = f(x, h) + f(h, y).$$

Prop 8: Soit $g: U \rightarrow F$. Si f et g sont différentiables sur U alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $df + \lambda dg$ est différentiable sur U et
 $d(\lambda f + g)(a) = \lambda df(a) + dg(a)$.

Prop 9: Toute application différentiable en $a \in U$ est continue en ce point.

Centre-ex 10: La réciproque est fautive. Considérons $x \mapsto |x|$.

Théorème 11: Soit V ouvert de F , $f: U \rightarrow V$ et $g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et
 $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

Exemple 12: Soit $f(x) = \|x\|^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et $h(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.
 Alors $g: x \mapsto \|x\|$ sur $\mathbb{R}^+$ est tel que $g = h \circ f$ donc g est différentiable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et $dg(x)(h) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

2) Dérivées directionnelles et dérivées partielles [ELA]

Déf 13: Soit $v \in E \setminus \{0\}$. On dit que f admet une dérivée en a selon le vecteur v si $g: \mathbb{R} \rightarrow F, t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0 , c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a))$ existe. On la note alors $D_v f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

Prop 14: Si f est différentiable en a , alors pour tout $v \in E$, f admet une dérivée en a suivant v et on a
 $D_v f(a) = df(a)(v)$.

Centre-ex 15: La réciproque est fautive. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que
 $f(x, y) = \frac{y^2 x}{x^2 + y^2}$, 0 si $x = y = 0$. Alors f admet une dérivée directionnelle en $(0, 0)$ suivant tout vecteur non nul mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

On considère désormais $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $p' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F .

Déf 16: On dit que f admet une dérivée en a suivant le i -indice si f admet une dérivée en a suivant le vecteur e_i . On note $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Prop 17: Si f est différentiable en a , alors les n dérivées partielles de f en a existent et pour $h = \sum_{k=1}^n h_k e_k \in E$ on a:
 $df(a)(h) = \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

Exemple 18: Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2 y, x^2 y^5)$. Alors:
 $df(2, 1)(h_1, h_2) = (3e_1 h_1 + 4e_2 h_2, 4h_1 + 5h_2)$.

Déf 19: Soit $f = f_1 e'_1 + \dots + f_p e'_p$. Si f est différentiable en a , on appelle matrice jacobienne de f au point a la matrice de $df(a)$ dans les bases p et p' . On la note $J_a f(a)$ et on a:

$\text{Jac } f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{p,n}(\mathbb{R}).$

Prop 20: Sans les mêmes hypothèses que le théorème 17, on a:
 $\text{Jac}(g \circ f)(a) = \text{Jac } g(f(a)) \times \text{Jac } f(a).$

Prop 21: Sans les mêmes hypothèses avec $g: V \rightarrow \mathbb{R}, 0=a:$
 $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$

Déf 22: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U . Alors $\forall u \in U$, il existe un unique vecteur de $\mathbb{R}^n$, appelé gradient de f en a et noté $\nabla f(a)$ tel que: $\forall h \in E, df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$

Exemple 23: Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x^2 - 2xy - z^3$.
 Alors $\nabla f(x,y,z) = (2x^2 - 2y, -2x, -3z^2)$ (en colonne)

II Différentiabilité d'ordre supérieur

1) Applications de classe C^1 [ELA]

Déf 24: On dit que f est de classe C^1 sur U si: f est différentiable sur U et si sa différentielle $df: U \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F)$ est continue sur U .

Prop 25: f est de classe C^1 sur U ssi les dérivées partielles de f existent et sont continues sur U .

Prop 26: Sans les mêmes hypothèses, le fait d'être de classe C^1 est stable par combinaison linéaire et par composition.

Théorème 27 (des accroissements finis): Soit U ouvert convexe de E , $a, b \in U$ avec $a \neq b$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U . Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que:

$f(b) - f(a) = df(c)(b-a).$

Théorème 28 (l'égalité des accroissements finis): Soit U un ouvert convexe de E , $a, b \in U$ et $f: U \rightarrow F$ de classe C^1 sur U . On suppose qu'il existe $k, r, 0$ tel que: $\forall u \in U, \|df(u)\| \leq k$. Alors: $\|f(b) - f(a)\| \leq k \|b-a\|$.

Application 29: Soit U convexe et $f: U \rightarrow F$ différentiable sur U . Alors f est constante ssi df est l'application nulle.

Application 30: Le déterminant est une application de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$ et pour tout $X, H \in M_n(\mathbb{R})$ on a:
 $d(\det)(X)(H) = \text{Tr}(\tilde{X}^T \cdot H)$ où $\tilde{X}$ est la transposée de X .
 On en déduit une formule pour le wronskien. DEV 1

2) Différentielle seconde [ELA]

Déf 32: On dit que f est deux fois différentiable en a si f est différentiable sur un voisinage de a et si df est elle-même différentiable en a .

Remarque 32: La différentielle seconde $d(df)(a)$ est une application linéaire continue de E dans $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Ainsi pour tout $h \in E, d(df)(a)(h)$ est une application linéaire continue de E vers F . Celle-ci s'identifie avec une application bilinéaire continue de $E \times E$ dans F .

Déf 33: Soit f deux fois différentiable sur U . On appelle différentielle seconde de f l'application $d^2f: U \rightarrow \mathcal{L}_c^2(E \times E, F)$, $x \mapsto d^2f(x)$ définie par $d^2f(x)(h, k) = d(df)(x)(h)(k) \quad \forall h, k \in E$.

Si de plus $x \mapsto d^2f(x)$ est continue sur U , on dit que f est de classe C^2 sur U .

Prop 34: Soit f deux fois différentiable en a . Alors toutes les dérivées partielles d'ordre deux de f sont définies en a et: $d^2f(a)(h, k) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j \quad \forall h, k \in \mathbb{R}^n$

Théorème 35 (de Schwarz): Soit f deux fois différentiable en a . Alors pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$

Contre-ex 36: Soit $f(x, y) = x \cdot y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $f(0,0) = 0$. Alors

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$

Déf 37: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 2 fois différentiable en a . Alors

La matrice Hess(f)(a) = $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est appelée matrice hessienne de f en a .

III Optimisation

1) Recherche d'extremums [ELA] [BOU]

Def 38: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a . On dit que f admet un point critique en a si $df(a) = 0$.

Prop 39: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. Si f admet un extremum local en a , alors $df(a) = 0$.

Contre-ex 40: Pour $f(x) = x^3$, 0 est un point critique mais n'est pas un extremum de f .

Prop 41: Si f admet un minimum local en $a \in U$ et si f est deux fois différentiable en a , alors $df(a) = 0$ et $d^2f(a)$ est une forme quadratique positive.

Prop 42: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable. On suppose que $a \in U$ est un point critique de f . Si $d^2f(a)$ est une forme quadratique définie positive, alors a est un minimum local strict de f .

Exemple 43: En dimension 2. Soit $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tel que $df(a) = 0$. On pose :

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \quad \text{Alors:}$$

- 1) Si $at - s^2 > 0$ et $a > 0$, f admet un minimum local en a .
- 2) Si $at - s^2 > 0$ et $a < 0$, f admet un maximum local en a .
- 3) Si $at - s^2 < 0$, f n'a pas d'extremum en a .
- 4) Si $at - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.

Exemple 44: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^4$. Alors f a 3 points critiques: $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. On a que $(0, 0)$ est un point selle et les deux autres sont des minimums relatifs.

2) Le cas des fonctions convexes [BOU] [ROM]

Def 45: Soit A une partie convexe de E . On dit que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si: $\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1]$, $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.

Prop 46: Soit U un ouvert convexe de E et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Soit f différentiable sur U . Alors f est convexe si:

$$f(x) - f(y) \geq df(x)(y - x) \quad \forall x, y \in U.$$

Prop 47: Soit U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur U . Alors f est convexe si: d^2f est une forme quadratique positive en tout point c-à-d: $d^2f(x)(h, h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j \geq 0 \quad \forall x \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Corollaire 48: Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et différentiable en $a \in U$ avec $df(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a sur U .

DEV 2

Corollaire 49: Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable avec $df(a) = 0$ et $d^2f(a)(h, h) > 0 \quad \forall x \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n$, alors f admet en a un minimum global.

Prop 50: Si f est convexe et admet un minimum local, alors ce minimum est global.